T H E S E présentée

pour l'obtention

du

DIPLOME de DOCTEUR de 3e CYCLE

à

L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE
- Paris 6 -

Spécialité : Physique Atomique et Statistique

Mention : Physique des Plasmas

par M. Thierry LEHNER

Sujet de la Thèse :

ETUDE DES FLUCTUATIONS CYCLOTRONIQUES IONIQUES APPLICATION A LA MESURE DE LA TEMPERATURE IONIQUE

Soutenue le 24 Février 1982 devant la Commission composée de :

MM. J. BOK	Président
R. AYMAR	Examinateur
M. PETIT	Examinateur
J. SCHMITT	Examinateur

LIBRARY
LUTHERAN
HOUSE

T H E S E présentée

pour l'obtention

du

DIPLOME de DOCTEUR de 3e CYCLE

à

L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE
- Paris 6 -

Spécialité : Physique Atomique et Statistique

Mention : Physique des Plasmas

par M. Thierry LEHNER

Sujet de la Thèse :

ETUDE DES FLUCTUATIONS CYCLOTRONIQUES IONIQUES APPLICATION A LA MESURE DE LA TEMPERATURE IONIQUE

Soutenue le 24 Février 1982 devant la Commission composée de :

MM.	J. BOK	Président
	R. AYMAR	Examinateur
	M. PETIT	Examinateur
	J. SCHMITT	Examinateur

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543522_0021

Avant Propos.

Ce travail a été effectué au laboratoire de Physique des Milieux Ionisés dirigé par M. H.J. Doucet que je remerçie de son acceuil.
Je suis tout particulièrement reconnaisant à Jacques Schmitt de m'avoir proposé et aidé dans l'accomplissement d'un sujet de thèse intéressant.
Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Dominique Gresillon pour m'avoir guidé tout au long de ce travail avec la compétence et la gentillesse qu'on lui connaît.
Je remerçie vivement Monsieur le Professeur Bok et Messieurs Aymar et Petit de l'intérêt qu'ils ont manifesté pour ce travail en acceptant de faire partie du jury de soutenance.
Je ne voudrais pas oublier J.M. Buzzi ,F. Doveil et B.Etlicher pour leur extrème gentillesse et efficacité dès que se présentait le moindre problème numérique à résoudre.
Toute ma reconnaissance va également à Bernard Chapey qui a eu la patience de bien vouloir réaliser les "innombrables" figures de cette thèse.Merci aussi à tout le secrétariat du laboratoire et particulièrement à Mesdames G. Alexandre et A. Stephan pour m'avoir aidé dans la réalisation matérielle de ce mémoire,et au service de Litographie de l'école pour son impression.

Avertissement: On a mis systématiquement en annexe un certain nombre de calculs un peu fastidieux qui n'apportent pas une grande compréhension physique mais sont néanmoins nécéssaires, ils représentent un volume non-négligeable et me permettrons de faire excuser la grande"longueur"de ce travail.

PLAN GENERAL

	Pages
Introduction.	1
I) Généralités.	4
1) Revue des différents diagnostics utilisés pour la détermination de la température ionique dans les "Tokamaks".	4
2) Obtention de la relation de dispersion électrostatique.	10
II) Calcul de la densité spectrale des fluctuations de densité électronique.	31
III) Etude théorique du facteur de forme associé aux ondes cyclotroniques ioniques.	46
1) Sensibilité des extrémas $(W^*_{ns}, (KP)^*_{ns})$ au rapport Te/Ti.	48
2) Etude du facteur de forme S(k,w).	55
3) Intégration numérique du facteur de forme dans l'espace des nombres d'onde.	64
4) Influence de quelques effets simples sur le spectre de fluctuations : amortissement, rôle de la géométrie.	73

* On trouvera un plan détaillé par chapitre au commencement de chacun des chapitres.

IV) Introduction d'effets complémentaires : vitesse de dérive, impuretés. 98

1) Présentation sur le spectre acoustique ionique (k// B). 99

2) Application au spectre cyclotronique ionique (k I B). 114

3) Observation du spectre cyclotronique ionique dans les plasmas de laboratoire. 125

V) Effets spécifiques aux "Tokamaks". 151

1) Effets des collisions. 152

2) Influence du cisaillement des lignes de champ magnétique. 168

3) Effets négligés, limitation de l'étude. 173

VI) Réalisation possible de l'expérience. 185

1) Rappels sur la diffusion Thomson. 185

2) Méthode de détection du signal. 192

3) Rapport signal sur bruit et résolution en fréquence. 195

4) Résolution en nombre d'onde. 197

5) Critères pour le choix d'une source de rayonnement. 200

6) A-t'on observé les modes cyclotroniques dans le plasma de TFR ? 205

7) Description d'un dispositif expérimental. 207

Conclusions et perspectives ultérieures. 214

INTRODUCTION

Ce travail est consacré à la mise au oint d'un diagnostic pour déterminer la température ionique dans les plasmas de fusion de type "Tokamak".On sait en effet quelle importance actuelle a la voie confinement magnétique dans les recherches sur la fusion thermonucléaire contrôlée.L'estimation précise de la température des ions constitue un point utile pour savoir si le chauffage de ces particules est satisfaisant en vue d'amorcer les réactions de fusion.

La motivation théorique de ce diagnostic réside dans la sensibilité dans le rapport température électronique sur température ionique Te/Ti,des points de vitesse de groupe nulle des ondes longitudinales ioniques,lorsque ces ondes se propagent dans une direction voisine de la perpendiculaire à la direction du champ magnétique.Comme on sait par ailleurs bien mesurer la tem-pérature électronique,on pourait en déduire la température ionique.

On démontre la sensibilité avec Te/Ti de la fréquence des extrémas de la relation de dispersion par une méthode analytique approchée puis par résolution numérique.On établit ensuite la densité spectrale des fluctuations de densité électronique as-sociée aux modes fluctuants thermiques du plasma(notamment par la méthode des particules habillées).Ce facteur de forme présen-te des maximas aux fréquences correspondantes aux points de vitesse de groupe nulle étudiés précédemment.Toute observation expérimentale de ce spectre présente une résolution géométrique finie qui se traduit par une intégration dans l'espace des nombres d'onde.Lorsqu'on effectue cette intégration l'allure du spectre survit très bien ,avec toutefois un léger décalage en

fréquence des pics, décalage qui reste prédictible théoriquement. Une étude de différents effets susceptibles de modifier la densité spectrale est abordée ensuite. On étudie également, pour comparaison, le facteur de forme acoustique ionique, ce facteur reflète les fluctuations se rapportant à des modes se propageant parallèlement au champ magnétique. C'est lui qui a étéjusqu'à présent proposé pour tenter le même diagnostic.

Une revue des différents mécanismes d'excitation "suprathermique" des ondes cyclotroniques dans les "tokamaks", ainsi que de divers effets stabilisant le spectre sont ensuite exposés.

La réalisation expérimentale de ce diagnostic repose sur la diffusion Thomson par les fluctuations de densité électronique.

L'observation des extrêmas du spectre doit pouvoir donner la température ionique avec une précision très supérieure à celles des méthodes utilisées jusqu'ici ; la précision du pointé est déterminée par la largeur des extrêmas.

On envisage ici la possibilité d'une expérience à des longueurs d'onde sub-millimétriques. Une importante pratique expérimentale dans ce domaine a été obtenue lors de l'étude par Diffusion Thomson électronique, des fluctuations thermiques d'un plasma de laboratoire. Un dispositif expérimental possible est enfin décrit.

CHAPITRE I

Pages

I) GENERALITES. 4

1) Revue des différents diagnostics utilisés pour la détermination de la température ionique dans les "Tokamaks". 4

. Idée à priori. 4

. Première méthode. 5

. Seconde méthode. 6

. Troisième méthode. 8

. Quatrième méthode. 9

2) Obtention de la relation de dispersion des ondes longitudinales dans un magnéto-plasma chaud. 10

. Modèle. 10

. Ondes de Bernstein ioniques neutralisées. 11

. Relation de dispersion. 15

. Amortissement des ondes de Bernstein ioniques. 16

- Amortissement Landau électronique. 20

- Amortissement cyclotronique ionique. 21

- Partie imaginaire de la constante diélectrique. 23

. Ondes longitudinales obliques. 25

. Ondes électromagnétiques perpendiculaires. 26

Conclusion de ce chapitre. 29

Références. 30

I.GENERALITES.

1)Revue des différents diagnostics utilisés pour la détermination de la température ionique.

Cette revue est en partie inspirée du très complet article de l'éqipe TFR sur leurs propres méthodes de diagnostic dans les "Tokamaks" (1).Pourqooi donc un nouveau diagnostic?

De très nombreuses méthodes toutes assez indirectes ont été proposées ;sans en faire une revue complète on aura l'occasion d'en mentionner quelques unes dans ce mémoire.

Rappelons qu'il est fondamental de connaître avec la meilleure précision la température des ions dans le centre des "Tokamaks" pour savoir si les différentes méthodes de chauffage des ions sont efficaces pour réaliser la fusion.

La première idée qui vient à l'esprit à ce propos consiste à chercher une grandeur mesurable qui soit reliée aux fonctions de distribution des vitesses des particules.En effet les fonctions de distribution sont en première approximation (si l'on néglige en particulier les particules découplées) à répartition maxwellienne des vitesses dans les machines toroidales.

Ceci s'explicite,si s désigne l'espèce de particule considérée, par:

$$f_s(\vec{v}) = \frac{n_s}{(\pi v_s)^{3/2}} e^{-\frac{v^2}{v_s^2}} \qquad \left(v_s^2 = 2\frac{k_B T_s}{m_s}\right) \qquad (1)$$

où ns,vs désignent respectivement la densité et la vitesse thermique desxparticules de type s.L'idéal serait une mesure de ces fonctions de distribution.A défaut,une mesure de la largeur à 1/e de leur profil,ou d'un de leurs moments ,donnerait une quantité proportionnelle à une fonction simple de la température ($\sqrt{T_s}$ pour la largeur à 1/e de Fs par exemple).Dans le cas d'une distribution de vitesse anisotrope le profil dépend de la direction:

$$f_s(\vec{v}) = \frac{n_s}{\pi^{3/2} v_{\perp s}^2 v_{\parallel s}} e^{-\left(\frac{v_\parallel}{v_{\parallel s}}\right)^2} e^{-\left(\frac{v_\perp}{v_{\perp s}}\right)^2} \qquad (1)'$$

dans cette dernière expression les indices // et ⊥ se réfèrent aux directions parallèle et perpendiculaire au champ magnétique Malheureusement ,l'acquisition de ces profils qui est très facile avec des sondes ou des analyseurs electrostatiques dans les plasmas de laboratoire courants devient impossible pour les plasmas très chauds des "Tokamaks".Il faut alors recourir à des méthodes différentes:

La première méthode qui procède de l'idée précédente consiste à mesurer l'intensité des raies lumineuses émises par les ions du plasma .Ces raies sont élargies par effet Döppler,en raison du mouvement thermique des particules.Les inconvénients de cette méthode sont multiples:tout d'abord il faut être certain que la cause d'élargissement des raies soit purement d'origine Döppler. On doit pouvoir négliger les effets Stark et Zeeman.Si l'effet Stark collisionnel est négligeable aux densités de particules utilisées,l'effet Zeeman est important à cause des champs magnétiques intenses utilisée ($\Delta\lambda_{//} \propto Bt^2$, Bt ,champ toroidal de l'ordre de 4 à 5 Teslas) et peut être comparable à l'effet Döppler.La discrimination théorique des deux effets est facile lorsque les raies sont bien connues par l'étude du triplement des raies et l'observation des polarisations.Cependant les impuretés fortement ionisées émettent des raies situées dans l'ultra-violet lointain ($\lambda < 1100 Å$) difficiles à observer et il devient ardu de distinguer les deux effets cités.De plus,les ions les plus abondants du plasma soit : H^+ ou D^+ n'ont plus leur électron pour émettre.Les idées formulées pour pallier à ces difficultés ont été les suivantes:

-rechercher des raies faiblement interdites mais assez intenses entre des sous-niveaux de l'état fondamental,dont l'émission se situe dans le visible et le proche ultra-violet:le Fer semble un candidat prometteur pour cela.

-étudier les raies d'émission des gaz neutres H2 ou D2;cependant la répartition de la densité de neutres dans l'enceinte fait que l'on observe une raie large caractéristique de la basse température de la région périphérique du tore à laquelle se superpose une raie plus étroite et plus intense venant de la faible proportion des particules neutres chaudes situées au centre de la machine et qui n'ont pu être ionisé,mais la résolution de cette composante s'avère malaisée.

De plus la future génération de "Tokamaks" visera un haut degré de pureté du plasma (car les pertes d'énergie par rayonnement des impuretés sont importantes) qui prendra ce diagnostic en défaut.Les seuls rayonnements proviendront alors des impuretés de la surface limitant le plasma.Signalons toutefois une méthode récemment utilisée qui se sert d'une analyse spectroscopique en contrôlant le niveau des impuretés, injectées à dessein ,comme sondes de température.

Une seconde méthode profite de la diffusion des ondes électromagnétiques par les fluctuations électroniques,elle est utilisée par plusieurs équipes en Angleterre (Culham),aux Etats-Unis (notamment à Princeton et Los-Angelès) ,et par une équipe Suisse (Lausanne (2)).Si le plasma est à l'équilibre thermodynamique (Te≃Ti) alors la largeur à mi-hauteur de la caractéristique ionique de ce spectre est proportionnelle à la vitesse thermique des ions.Cette méthode est utilisée pour étudier l'ionosphère (avec des onde centimétriques),et pourait être prochainement appliquée aux "Tokamaks" à l'aide de lasers infra-rouges .

La figure 1 montre l'allure de ce spectre des fluctuations de densités électroniques non-corrélées puis corrélées ,appelées respectivement cohérentes et non-cohérentes;nous aurons l'occasion de revenir plus loin sur l'usage et le sens de cette distinction.La première courbe est simplement une gausienne de demi-largueur caractéristique du mouvement thermique des élec-

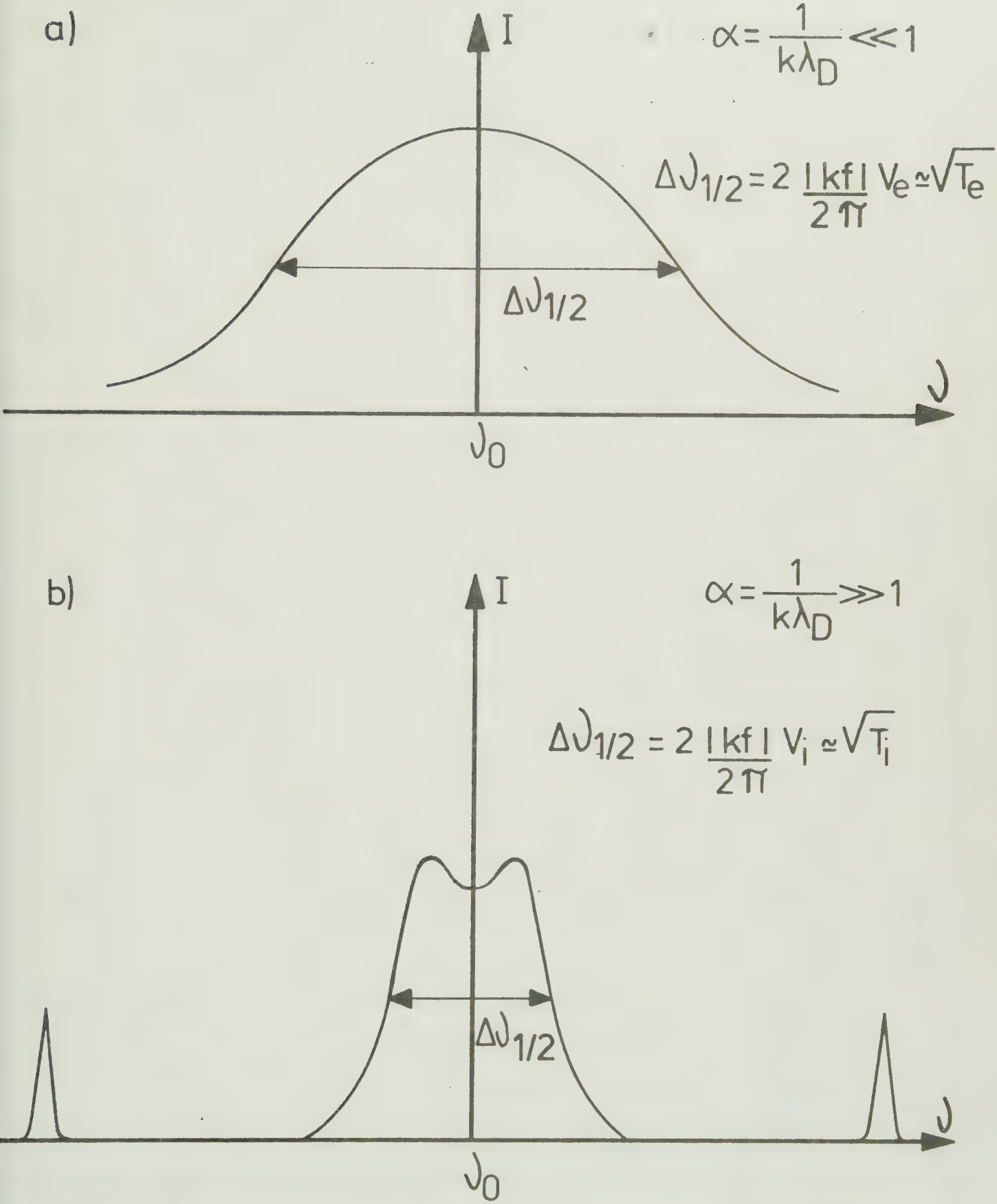


Figure 1 : Caractéristiques du facteur de forme, pour la diffusion par :
a) les densités de fluctuations électroniques non corrélées.
b) corrélées. ν_0 désigne la fréquence incidence, kf est le vecteur d'onde de diffusion.

trons .Les ondes propres longitudinales du milieu sont responsables de la forme de la courbe 2 : les pics à hautes fréquences sont liés aux modes plasma électroniques,alors que les épaulements de la partie centrale sont dus aux modes acoustiques ioniques.

Le gros inconvénient de ce procédé est que la partie centrale du spectre est très sensible aux impuretés et peut être complètement déformée,en particulier par la présence d'un faible pourcentage d'impuretés notamment,lourdes ,comme l'a montré Evans (3).D'autre part on sait qu'il existe d'autres microturbulences dans le plasma et notamment celle des ondes de dérive;celles-ci sont susceptibles de masquer la composante ionique du spectre. On étudie en effet la diffusion des ondes électromagnétiques par les électrons qui suivent les ions dans leur mouvement c'est ce qui fait qu'il est possible de refléter les propriétés de ces derniers.

Une troisième méthode qui constitue le diagnostic le plus utilisé actuellement,procède par l'obtention du spectre d'échange de charges avec les atomes neutres.Il reste toujours au sein du plasma une faible proportion d'atomes neutres qui n'a pu être ionisée.Ces atomes lents peuvent subir une réaction d'échange de charge en passant près d'un ion plus énergétique,exemple:

$$H_0 + H^+ \longrightarrow H^+ + H_0$$

il y a eu échange de l'eléctron entre les deux protons.On suppose approximativement que dans cette réaction les vitesses initiales et finales des noyaux sont inchangées.Le plasma va alors émettre des neutres énergétiques dont la vitesse révèle l'agitation thermique des ions du plasma.Le principe expérimental (1) vise à effectuer une analyse énergétique des neutres à l'aide d'un analyseur électrostatique collectant puis analysant par ionisation les particules incidentes.La difficulté essentielle

est d'éviter les rayonnements parasites (ionisants).Ce procédé ne pourra plus s'appliquer dans la nouvelle génération de machines ,car dans celles-ci les rayons intérieurs des tores vont augmenter notablement au delà du libre parcours moyen des atome neutres,et d'autre part les futurs neutres proviendront plutôt des régions externes que des régions internes du plasma.

Signalons une dernière méthode qui utilise le flux de neutrons émis lors de la réaction:

$$2\ {}^{2}_{1}D \longrightarrow {}^{3}_{2}He + {}^{1}_{0}n$$

La section efficace de ce processus entre deux noyaux énergétiques est une fonction de l'énergie relative des ions D^+ interagissant,le taux de production de ces neutrons dans un plasma maxwellien est une fonction simple de la température des deutons,si la distribution de leurs vitesses reste descriptible par une maxwellienne même à très haute énergie.Si on utilise un plasma composé de Deutérium et de Tritium,on aura également un flux de neutrons grâce à la réaction de fusion :

$${}^{3}_{1}T + {}^{2}_{1}D \longrightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{1}_{0}n$$

La difficulté théorique est d'évaluer correctement à nouveau le taux de production de neutrons émis.Cette dernière voie est certainement appelée à se développer dans le futur.

Notre sentiment est que la mise au point d'un diagnostic nouveau adapté aux machines en cours d'élaboration reste un sujet d'actualité qui motive cette étude.

B)Obtention de la relation de dispersion des ondes longitudinales dans un magnétoplasma chaud.

Modèle: on considère un plasma homogène,infini,sans collisions plongé dans un champ magnétique uniforme.

Ce calcul très classique dans le cas ultra-simplifié considéré a pour nous l'intérêt de préciser dans les domaines des nombre d'onde et de fréquence qui vont nous occuper,la forme de la relation de dispersion.La relation de dispersion s'obtient en considérant un plasma stable obéissant à l'équation de Vlasov linéarisée autour de l'équilibre thermique.Le couple des équations de Vlasov et de Poisson permet de décrire les perturbations.On effectue l'approximation des ondes longitudinales en ignorant le système complet d'équations de Maxwell.On néglige le couplage entre les modes longitudinaux et transverses ainsi ce que l'on justifie habituellement pour des vitesses de phase des ondes bien inférieures à la vitesse de la lumière,ce sera notre cas: $\left(\frac{V\varphi}{c}\right)^2 \ll 1$

les ondes longitudinales sont caractérisées par: $\vec{k}' \wedge \vec{E}' = \vec{0}$

Si $f_{os}(v)$ désigne la fonction de distribution à l'équilibre pour les particules de type s et $f_s^{(1)}$ la perturbation,l'équation de Vlasov linéarisée pour $f_s^{(1)}$ s'écrit:

$$\frac{\partial f_s^{(1)}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_s^{(1)}}{\partial \vec{r}} + \frac{q_s}{m_s}\left(\vec{E}^{(1)} \frac{\partial f_{os}}{\partial \vec{v}} + \vec{v} \wedge B_o \cdot \frac{\partial f_s^{(1)}}{\partial \vec{v}}\right) = 0 \quad (2)$$

B_o est le champ magnétique supposé statique appliqué,$\vec{E}^{(1)}$ est la fluctuation de champ électrique,q_s et m_s sont la charge et la masse des particules s,l'équation de Poisson s'écrivant:

$$\operatorname{div} \vec{E}^{(1)} = \sum_s \frac{q_s}{\varepsilon_o} \int f_s^{(1)}(\vec{v})\, d^3v + S \quad (3)$$

(où S est un terme source que l'on explicitera au paragraphe suivant car il nous sera utile pour le concept de particules habillées).Le champ $\vec{E}^{(1)}$ dérive d'un potentiel V.

En utilisant (par exemple) la méthode de Fourier-Laplace, on obtient alors l'expression bien connue de la constante diélectrique du plasma dans l'approximation longitudinale: (voir par ex 5)

$$\varepsilon(\bar{k},\omega) = \varepsilon(k_{//},k_{\perp},\omega) = 1 + \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{k^2} \int d^3v \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_s}\right) \times$$

$$\times \left\{ \frac{n\Omega_s}{v_\perp} \frac{1}{n_{os}} \frac{\partial f_{os}}{\partial v_\perp} + k_{//} \frac{\partial f_{os}}{\partial v_{//}} \frac{1}{n_{os}} \right\} \quad (4) \text{ et } V(k,\omega) = \frac{S}{k^2 \varepsilon(\bar{k},\omega)\varepsilon_0} \quad (5)$$

Les notations sont les suivantes et valent aussi pour la suite (se référer au lexique): les indices // et ⊥ désignent la direction parallèle et les directions perpendiculaire à Bo, ω_{ps}, Ω_s, Nos représentent la pulsation plasma, la fréquence angulaire de gyration cyclotronique et la densité moyenne d'une espèce s. Jn est la fonction de Bessel d'ordre n. Il est possible d'évaluer la relation W(K) lorsqu'on se donne un certain nombre de moments de la fonction de distribution à l'équilibre même si cette dernière n'est pas exactement connue, toutefois on se limitera ici au cas d'une fonction donnée, prenons le cas de disributions Maxwelliennes anisotropes comportant une vitesse Vos de dérive des espèces dans la direction de B_0:

$$f_{os}(\bar{v}) = \frac{n_{os}}{\pi^{3/2} v_{//s} v_{\perp s}^2} e^{-\left(\frac{v_{//}-v_{os}}{v_{//s}}\right)^2} e^{-\left(\frac{v_\perp}{v_{\perp s}}\right)^2} \quad (6)$$

on a alors:

$$\varepsilon(\bar{k},\omega) = 1 - \sum_s \frac{2\omega_{ps}^2}{\pi^{3/2} k^2} \int \frac{d^3v}{v_{//s} v_{\perp s}^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_n^2\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_s}\right)}{\omega - n\Omega_s - k_{//} v_{//}} \left\{ \frac{n\Omega_s}{v_{\perp s}^2} + k_{//}\left(\frac{v_{//}-v_{os}}{v_{//s}^2}\right) \right\} e^{-\left(\frac{v_\perp}{v_{\perp s}}\right)^2} e^{-\left(\frac{v_{//}-v_{os}}{v_{//s}}\right)^2} \quad (4b)$$

et après intégration en vitesses (voir par exemple 5), on a:

$$\varepsilon(\bar{k},\omega) = 1 + \sum_s \frac{2\omega_{ps}^2}{k^2 v_{\perp s}^2} e^{-\Lambda_s} \sum_n I_n(\Lambda_s) \left\{ 1 + z_{os} Z(z_{ns}) + \tau_s z'(z_{ns}) \right\} \quad (4c)$$

$\tau_s = (T_{//s} - T_{\perp s})/2T_{//s}$ $\quad z_{ns} = (\omega - n\Omega_s - k_{//}v_{os})/k_{//}v_{//s}$

si on se limite à des fonctions de distribution isotropes et sans dérive: $\varepsilon(\bar{k},\omega) = 1 + \sum_s \frac{k_{ds}^2}{k^2} e^{-\Lambda_s} \sum_n I_n(\Lambda_s)(1 + z_{os} Z(z_{ns}))$ (4d)

$k_{ds}^2 = \frac{n_{os} q_s^2}{\varepsilon_0 k T_s}$ $\quad \Lambda_s = \frac{1}{2}\left(\frac{k_\perp v_s}{\Omega_s}\right)^2$ $\quad z_{ns} = \frac{\omega - n\Omega_s}{k_{//} v_s}$ $\quad Z(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t-\zeta} dt$

Cette relation permet de décrire tous les modes longitudinaux présents dans le plasma. (Z est la fonction de "dispersion")

-<u>Ondes de Bernstein ioniques neutralisées</u>.

On s'intéresse maintenant aux ondes ioniques "quasi-neutralisées" qui se propagent dans une direction oblique par rapport à B (5).

Le domaine de validité de ces ondes est précisé ci-dessous:

$\frac{\omega}{k_{//}} \ll v_e$

La vitesse de phase parallèle au champ magnétique est inférieure à la vitesse thermique des electrons, ceux-ci sont alors en équilibre avec le potentiel de l'onde et pourront être considérés comme Boltzmanniens, car leur rayon de Larmor est très inférieur à la longueur d'onde et donc les electrons ne seront pas sensible à l'effet du champ magnétique dans ce domaine d'ondes.

Il existe d'autre part une limitation inférieure de la vitesse de phase parallèle qui permet d'éviter l'amortissement Landau sur les ions: $\frac{\omega}{k_{//}} \gg v_i$

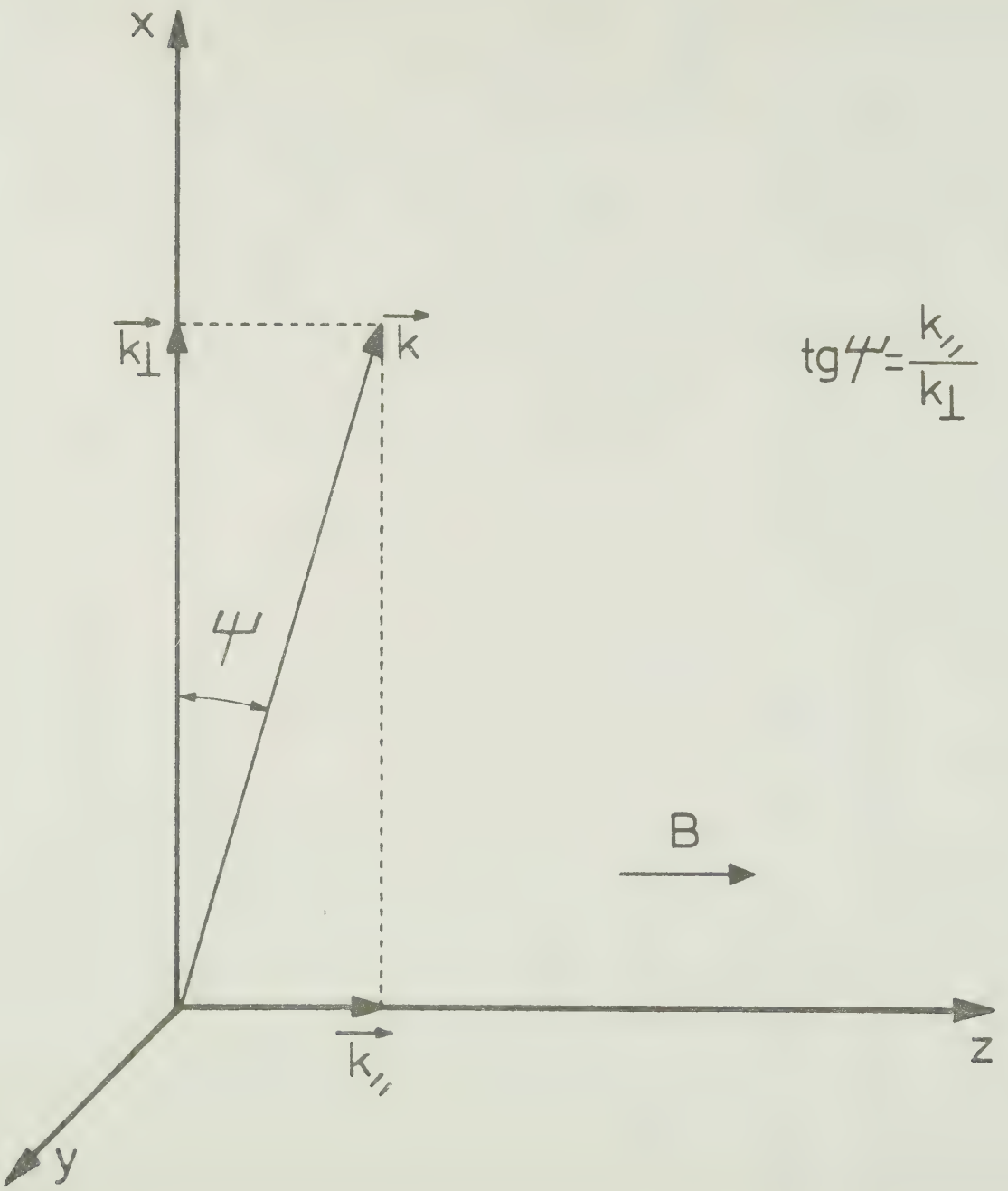
On a donc, si ψ désigne l'angle de propagation des ondes dans le plan (K,B): (Fig 2)

$\frac{v_i}{v_e} = \left(\frac{m_e}{m_i}\frac{T_i}{T_e}\right)^{1/2} \ll \operatorname{tg}\psi \ll 1$

et dans ces conditions: avec $\omega \sim n'\Omega_i$ $k\rho_i \sim 1$ (ondes ioniques)

$$\begin{cases} Z_{ni} = \frac{(n'-n)\Omega_i}{k_{//}v_i} \gg 1 \\ z_{oi} \text{ peut être } \gg 1 \\ \Lambda_i \gtrsim 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} Z_{ne} \gg 1 \text{ si } n \neq 0 \\ z_{oe} \ll 1 \\ \Lambda_e \frac{\sim m_e}{m_i} \Lambda_i \ll 1 \end{cases}$$

On peut alors utiliser les développements en série pour In, et asymptotiques pour les fonctions Z et Z' :



$$\operatorname{tg}\psi = \frac{k_{//}}{k_\perp}$$

Figure 2 : Système de coordonnées.

$z \gg 1 \qquad Z(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(1/2)} \frac{1}{z^{2n+1}} + i\sqrt{\pi}\, e^{-z^2}$

$z \ll 1 \qquad Z(z) = -2z \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+3/2)}$

z ğqn $\qquad In(z) = (\frac{1}{2} z)^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{4} z^2)^k}{k!(n+k)!}$

Γ est la fonction Gamma d'Euler.

Ici, en se limitant aux termes d'ordre le plus bas dans tous ces développements :

$$zos\ Z(zns) = \frac{-\omega}{\omega - n\Omega s}$$

$$In(\Lambda e) = 0 \text{ pour } n \neq 0 \qquad Io(\Lambda e) = 1.$$

On se limite également au terme d'ordre zéro en $k_{//}/k_{\perp}$.

ceci permet d'obtenir:

$$Ree\ \epsilon = 1 + \sum_{s=1}^{i} \frac{kds^2}{k_{\perp}^2} e^{-\Lambda s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} In(\Lambda s) \left(1 - \frac{\omega}{\omega - n\Omega s}\right) + \frac{kde^2}{k_{\perp}^2} \left(\frac{-Z'r(zoe)}{2}\right) \qquad (1)$$

$$Im\ \epsilon = -\sqrt{\pi} \left\{ \sum_{s=1}^{i} \frac{kds^2}{k_{\perp}^2} e^{-\Lambda s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} In(\Lambda s)\, zos\, e^{-3ns^2} + \frac{kde^2}{k_{\perp}^2} zoe\, e^{-zoe^2} \right\}$$

Cette dispersion approchée revient à considérer le mouvement des électrons seulement parallèle à B ,et le mouvement I pour les ions.

On remarquera que comme zoe << 1 et zns >> 1 pour s =1 , n ≠ 0, Ces ondes seront très peu amorties. A ce propos, on se place ici dans le cas d'un problème aux conditions initiales. Le vecteur d'onde $\vec{k}$ est choisi réel, la fréquence peut être complexe. Ceci sera compatible avec l'expérience de diffusion que l'on envisagera plus tard. On parlera alors d'amortissement temporel des modes. On remarque qu'à l'ordre d'approximation considéré, cette relation de dispersion est indépendante de $k_{//}$, pour sa partie réelle.

Relation de dispersion.

Annuler la constante diélectrique du plasma permet de définir les modes naturels du plasma, c'est la relation de dispersion. Ceci suppose deux conditions réalisées:

$$Re\,\varepsilon = 0 \quad \text{et} \quad Im\,\varepsilon = 0$$

Si $Im\,\varepsilon$ est non nulle, ceci conduit à l'amortissement des ondes
On peut alors reproduire, après J.P.M Schmitt (5), l'allure de la dispersion de ces ondes en utilisant le diagramme fréquence et nombre d'onde (ω, k).
La condition d'annulation de la partie réelle de la constante diélectrique se réecrit:

$$\frac{1}{Z_{io}^2}\frac{ne}{n_{io}}\frac{Ti}{Te} + \frac{k_\perp^2}{k_{di0}^2} - \sum_{s=1}^{i}\frac{k_{ds}^2}{k_{di0}^2}\,e^{-\Lambda_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{I_n(\Lambda_s)\,n\Omega_s}{\omega - n\Omega_s} = 0 \qquad (10)$$

Résoudre cette équation consiste à trouver la ou les fréquences qui satisfont à la relation (10). En raison de la somme sur n on devrait en général résoudre une équation polynomiale de degré infini. Cependant lorsque $k_\perp \rho \ll 1$ ou $\gg 1$ on peut estimer analytiquement la forme des courbes de dispersion.
Spécialisons nous à un mélange d'ions, l'indice io repérant l'ion majoritaire.

-Pour les grandes longueurs d'onde perpendiculaires.
- Si $k_\perp \rho i \ll 1$, on a, au voisinage de l'harmonique $n\Omega i$ de l'ion considéré, Zi fois chargé :

$$\omega \simeq n\,\Omega i \left\{ 1 + \frac{ni}{n_{io}}\frac{Zi^2}{Zi_o^2}\,\frac{In(\Lambda i)}{\left\{\frac{ne}{nio}\frac{Ti}{Te} + \Lambda_{io}\left(\frac{\Omega io}{\omega pio}\right)^2\right\}} \right\}$$

$$\text{soit } \omega \simeq n\Omega i\,\frac{\left\{1 + \frac{ni}{nio}\frac{Zi^2}{Zio^2}\left(\frac{\Lambda i}{2}\right)^n\frac{1}{n!}\right\}}{\left\{\frac{ne}{nio}\frac{Ti}{Te} + \Lambda_{io}\left(\frac{\Omega io}{\omega pio}\right)^2\right\}}$$

Lorsque l'on est dans un cas de "dégénérescence" par exemple si Ωi_o et Ωi sont des multiples l'un de l'autre avec $\frac{\Omega i}{\Omega i_o} = m$:

On observe que les courbes de dispersion présentent une bande passante pour une fréquence comprise entre nωci et un point de vitesse de groupe nulle (autre que $\Lambda_i=0$ et $\Lambda_i=\infty$). Il existe une coupure entre cet extrêma et l'harmonique suivante (n+1)ωci . Lorsque Ti/Te devient nul la première branche de la dispersion passe sur la seconde harmonique cyclotronique et l'on retrouve le diagramme de dispersion des ondes de Bernstein ioniques pures au sens théorique pour lasquelles K//=0.(Les fréquences hybrides basse et haute apparaissent également ,avec une complication du diagramme lorsqu'il existe plusieurs espèces ioniques avec l'apparition de fréquences hybrides ion-ion).
voir par exemple (5).

Sur les figures 3,4,5 ,la sensibilité des extrémâs de chaque bande passante en fonction de Te/Ti apparaît très clairement On constate que la bande passante est d'autant plus importante que Te/Ti est élevé (à n donné).Nous nous proposons d'étudier plus en détail cette dépendance au chapitre II.

-Amortissement des ondes de Bernstein ioniques.

On va voir que vu les conditions de définition de ces modes ils sont très peu amortis.L'amortissement n'est cependant pas entièrement nul et il est dû à deux phénomènes,il se calcule par la méthode "standard",on rapelle que l'on parlera ici d'amortissement temporel des modes,ce qui s'écrit:

$\omega = \omega_r + i\omega_i$ et on cherche des modes"normaux" ($a_n e^{i\omega t}$)

avec $\varepsilon(\omega_r+i\omega_i)=0$ $\quad \varepsilon = \varepsilon_r + i\varepsilon_i$

$$\varepsilon_r(\omega_r) + i\left(\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial \omega}\right)_{\omega_r} \omega_i + i\,\varepsilon_i(\omega_r+i\omega_i) = 0$$

d'où $$\omega_i = -\left.\frac{\varepsilon_i(\omega)}{\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial \omega}}\right|_{\omega=\omega_r}$$ (où l'on a pris $\varepsilon_r(\omega_r)=0$)

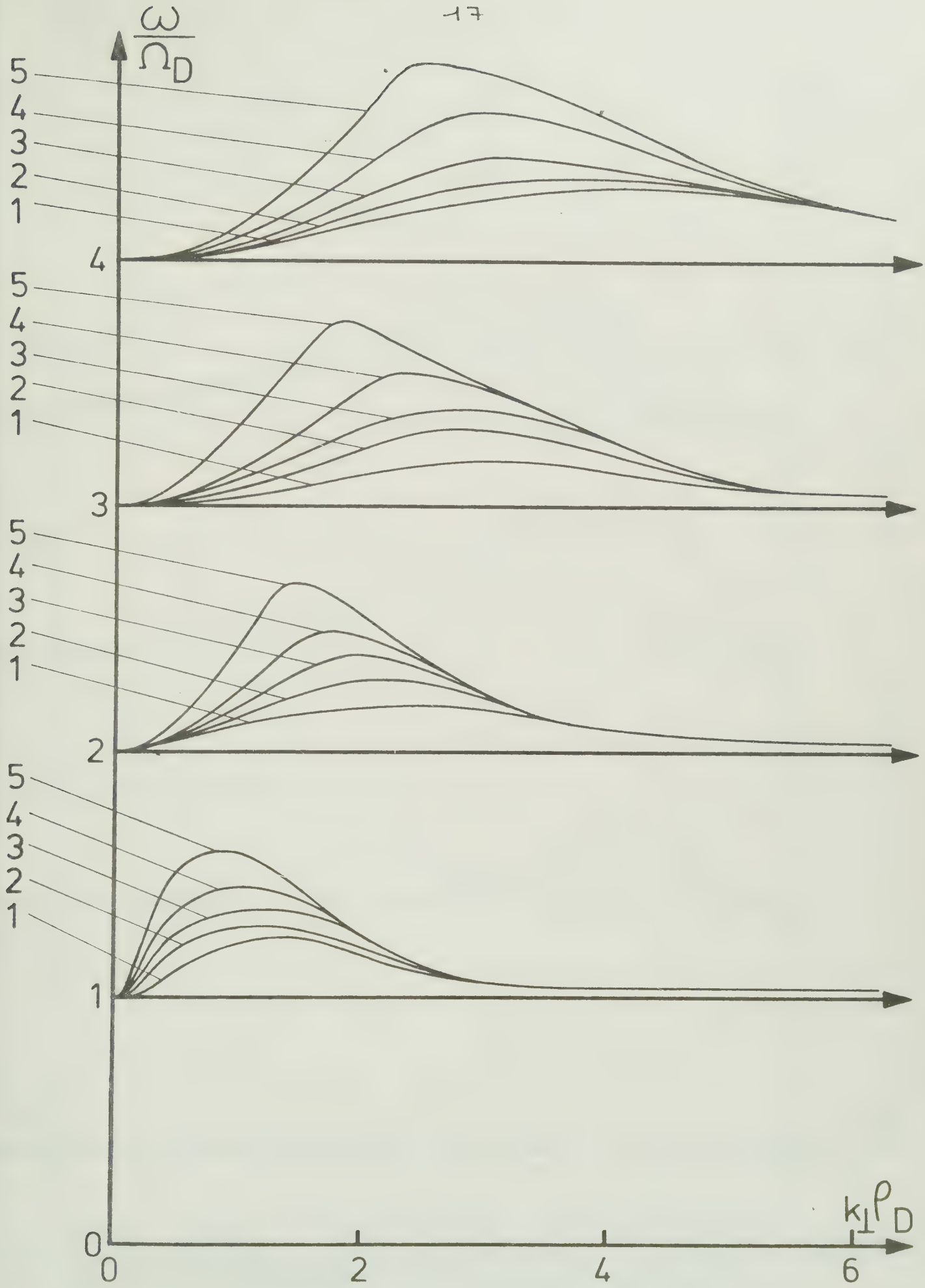


Figure 3 : Courbes de dispersion des ondes de Bernstein quasi-neutralisées pour des ions maxwelliens et avec des électrons boltzmanniens. Les courbes 1, 2, 3, 4 et 5 sont obtenues pour Te/Ti = 1, 2, 3, 5, 10 et $\omega_{pi}^2/\Omega_i^2 = 1000$.

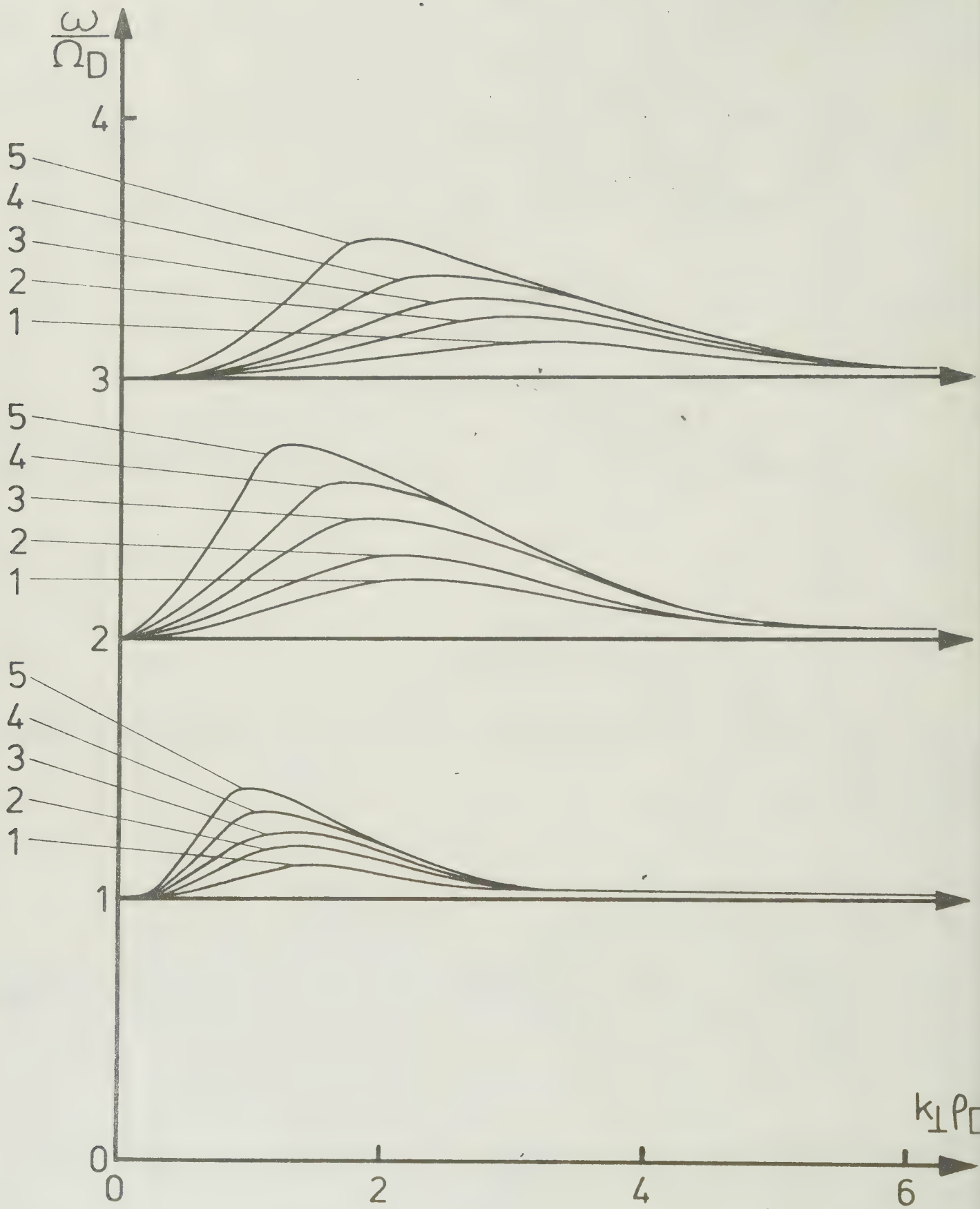


Figure 4 : Mêmes conditions que pour la Figure 3, pour un mélange Dutérium-hydrogène dans les proportions respectives 80 % - 20 %. Noter la variation en fréquence des extrêmas par rapport à la Figure 3.

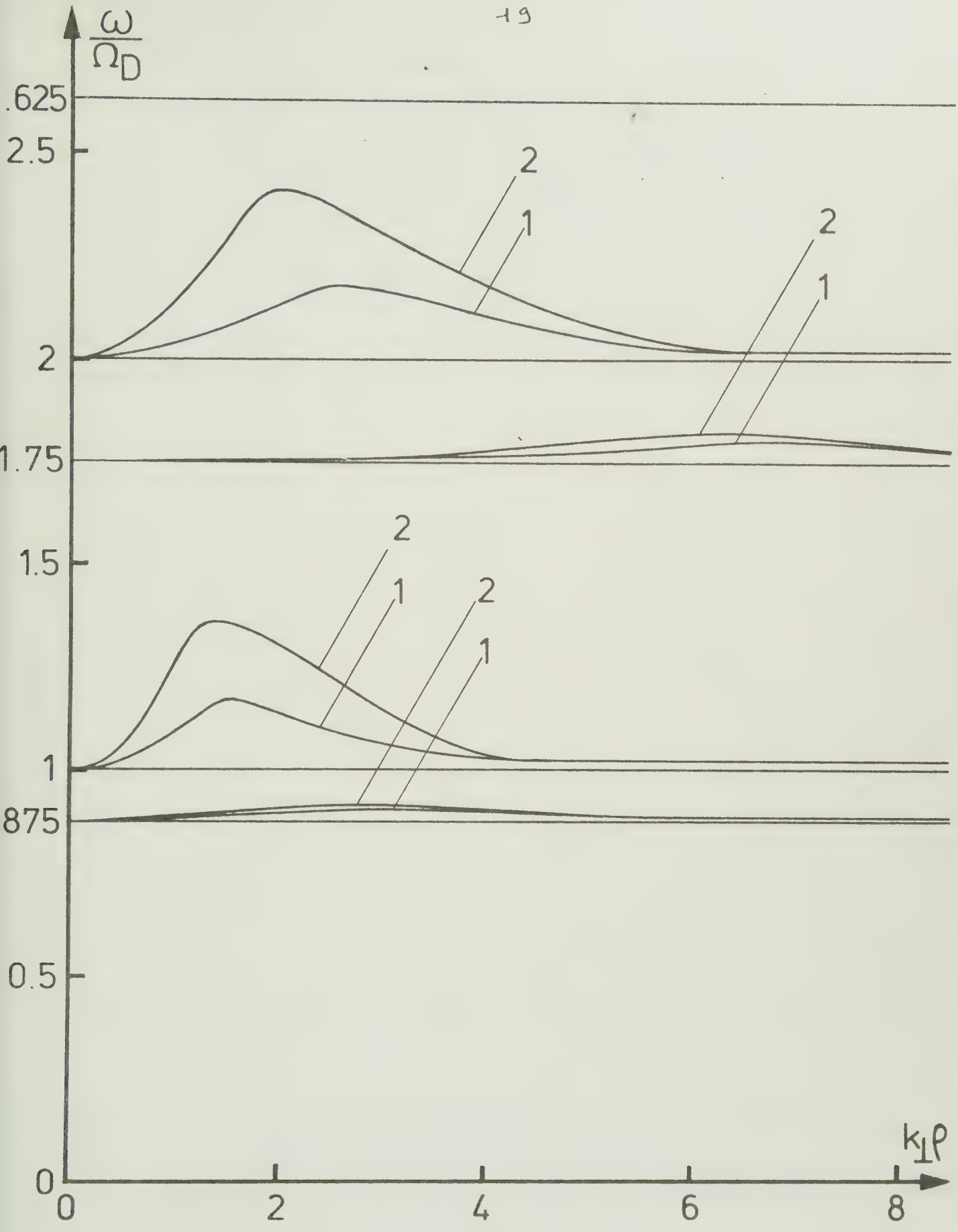


Figure 5 : Ondes de Bernstein ioniques quasi-neutralisées pour le mélange Deutérium (D+) - Oxygène (O7+) pour des proportions nd = 90 %, no = 10 %.
Les courbes 1 et 2 sont obtenues pour Te/Ti = 1,3.

-amortissement Landau électronique:

ce terme apparait dés que le vecteur d'onde acquiert une petite composante parallèle à B, ceci se traduit par un terme dans la partie imaginaire de la constante diélectrique relié à Im (Z'(Zoe)) et a pour expression $K_{de}^2/K_{\perp}^2 * Zoe\ e^{-zoe^2}\sqrt{n}$, ce terme est faible dans les conditions envisagées car $Zoe \ll 1$, la vitesse de phase parallèle de l'onde restant inférieure à la vitesse thermique des électrons, et il y aura donc très peu d'électrons résonants avec l'onde.

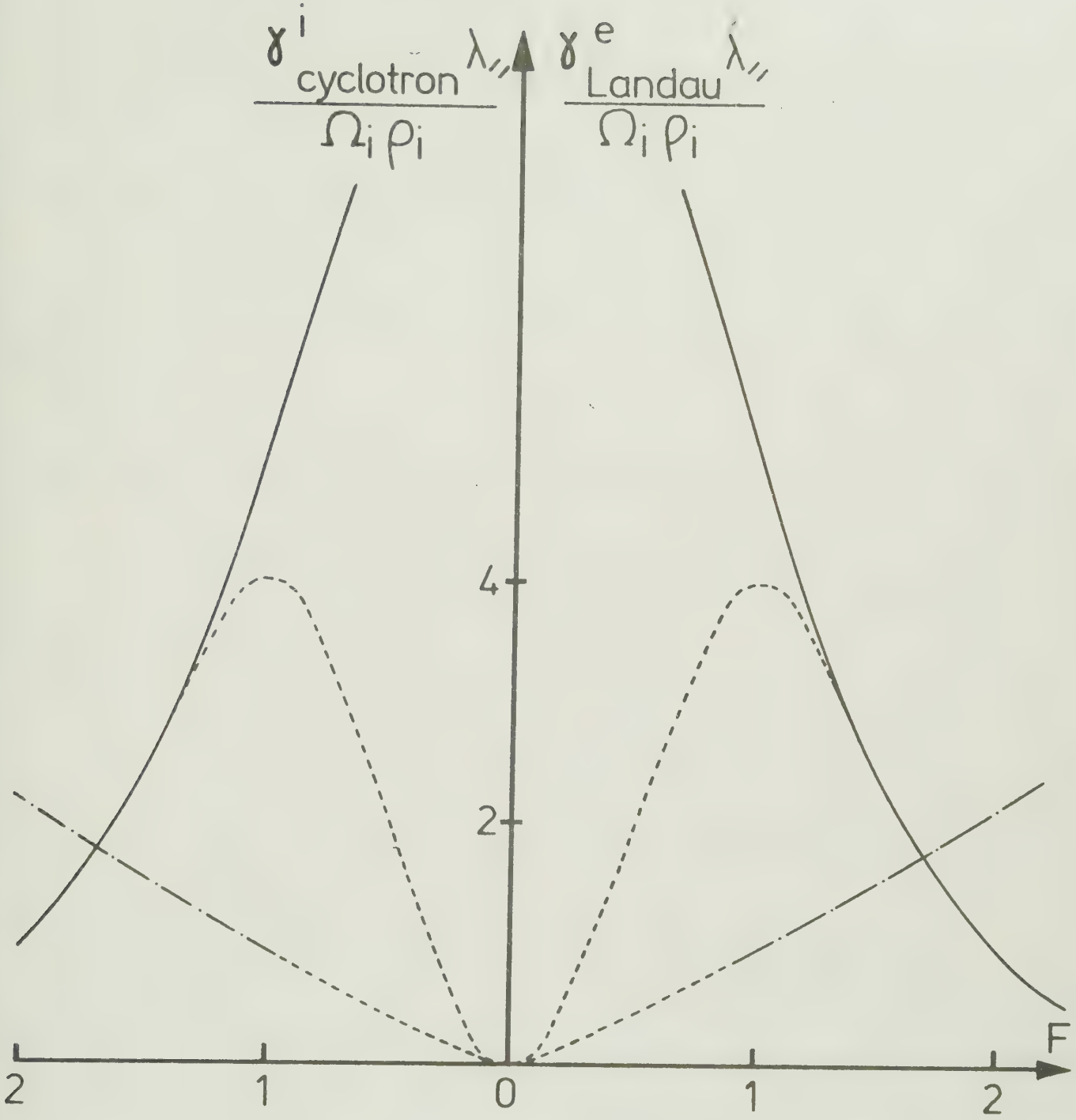


Figure 6 : Amortissement cyclotronique ionique (trait plein) et amortissement Landau électronique (trait tireté) en fonction de la fréquence au voisinage d'une harmonique.
La courbe approchée dans le cas de l'amortissement cyclotron n'est valable que si l'abscisse est plus grande que 1.
$T_e/T_i = 1$, $\Omega_i/k_{//}\, v_i = 10$.

La figure 6 donne l'allure de cet amortissement pour $k_{//}$ fixé.

Im(ω) peut s'obtenir pour un traitement différentiel :

$$Im\omega = -\sqrt{\pi}\ zoe\ e^{-zoe^2}\ \frac{kde^2}{k^2}\ \frac{1}{\frac{\partial \varepsilon r(\omega, k_\perp)}{\partial \omega}}$$

$$(11)\quad Im\left(\frac{\omega}{\Omega s}\right) = -\sqrt{\pi}\ zoe\ e^{-zoe^2} \sum_{s=1}^{i} \frac{kde^2}{k_{\perp s}^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} In(\Lambda s)\ \frac{n\Omega s^2}{(\omega - n\Omega s)^2}$$

au voisinage d'une harmonique : $k_{//} V_s \lesssim \omega - n\Omega s << \Omega s$ avec $s = i$.

$$Im\left(\frac{\omega}{n\Omega s}\right) = -\sqrt{\pi}\ zoe\ e^{-zoe^2}\ \frac{kde^2}{kdi^2}\ \frac{1}{In(\Lambda s)e^{-\Lambda s}}\ \left(\frac{\omega - n\Omega s}{n\Omega s}\right)^2, \quad (12)$$

avec $zoe = \dfrac{\omega}{k_{//} Vthe}$

On utilise la formule approchée $\left(In(\Lambda s)\ e^{-\Lambda s}\ \frac{Te}{Te+Ti} + 1\right) = \frac{\omega}{n\Omega s}$

sur une branche donnée de la relation de dispersion, pour tracer cette courbe soit :

$$\lambda_{//}/\rho i\ \frac{\gamma\ Landau}{\Omega i}\ \frac{ve}{vi} = -\ 2\pi^{3/2}\ \left(\frac{\omega - n\Omega}{k_{//} vi}\right)\ \frac{\omega}{k_{//} vi} \times \frac{Ti}{Te+Ti} \quad (13)$$

- L'autre origine à l'amortissement est de nature cyclotronique ionique : il y a absorption de l'onde par les particules lorsque la fréquence est voisine d'une harmonique cyclotronique. Le mécanisme est identique pour une onde électromagnétique. On se place dans le référentiel de l'onde et l'on résoud l'équation des trajectoires des particules dans ce référentiel et l'on

calcule le taux d'augmentation d'energie des particules ioniques on trouve que ce taux est exactement égal à la diminution d'é-nergie de l'onde, le taux d'amortissement de l'onde étant préci-sément à cyclotron (∂ est le taux de décroissance de l'énergie de l'onde). Des calculs analogues pour les ondes electromagnétiques ont été effectué (6). J.P.M Schmitt a etudié en détail et observé de larges amortissements pour les ondes électrostatiques (5), voir aussi Images de la Physique 1976.

L'allure de cet amortissement en fonction de la fréquence est donné sur la figure 6; ce dernier devient important pour ω voisin de $n\Omega_i$, effet d'autant plus localisé que l'angle de propagation est voisin de $\frac{\pi}{2}$. Par un traitement différentiel on peut obtenir une valeur approchée de l'amortissement au voisinage d'une harmonique; Si $k_{//}v_s \lesssim \omega - n\Omega_i \ll \Omega_i$

$$Im\left(\frac{\omega}{n\Omega_s}\right) = -\sqrt{\pi}\,\zeta_{os}\, e^{-\zeta_{ns}^2} \left(\frac{\omega - n\Omega_s}{n\Omega_s}\right)^2 \quad (s=i)$$

soit: $$\frac{\partial}{n\Omega_s}\frac{\lambda_{//}}{\rho_\zeta} = -\frac{2\pi^{3/2}}{n}\left(\frac{\omega - n\Omega_s}{n\Omega_s}\frac{1}{k_{//}v_s}\right)^2 \frac{\omega}{k_{//}v_s}\, e^{-\zeta_{ns}^2} \qquad (14)$$

(cette formule n'est plus valable si la fréquence est trop voisine d'une harmonique, ni lorsque l'ion a une abondance très faible).

-<u>la partie imaginaire de la constante diéelectrique</u> .

La figure 7 représente la variation qualitative de la partie imaginaire de la constante diélectrique avec K//. Cette variation nous sera utile dans les prochains chapitres. On a utilisé la relation approchée qui tient compte seulement des termes d'amortissement electronique et cyclotronique au voisinage d'une bande passante, on peut voir que $Im\,\varepsilon$ peut être minimale:

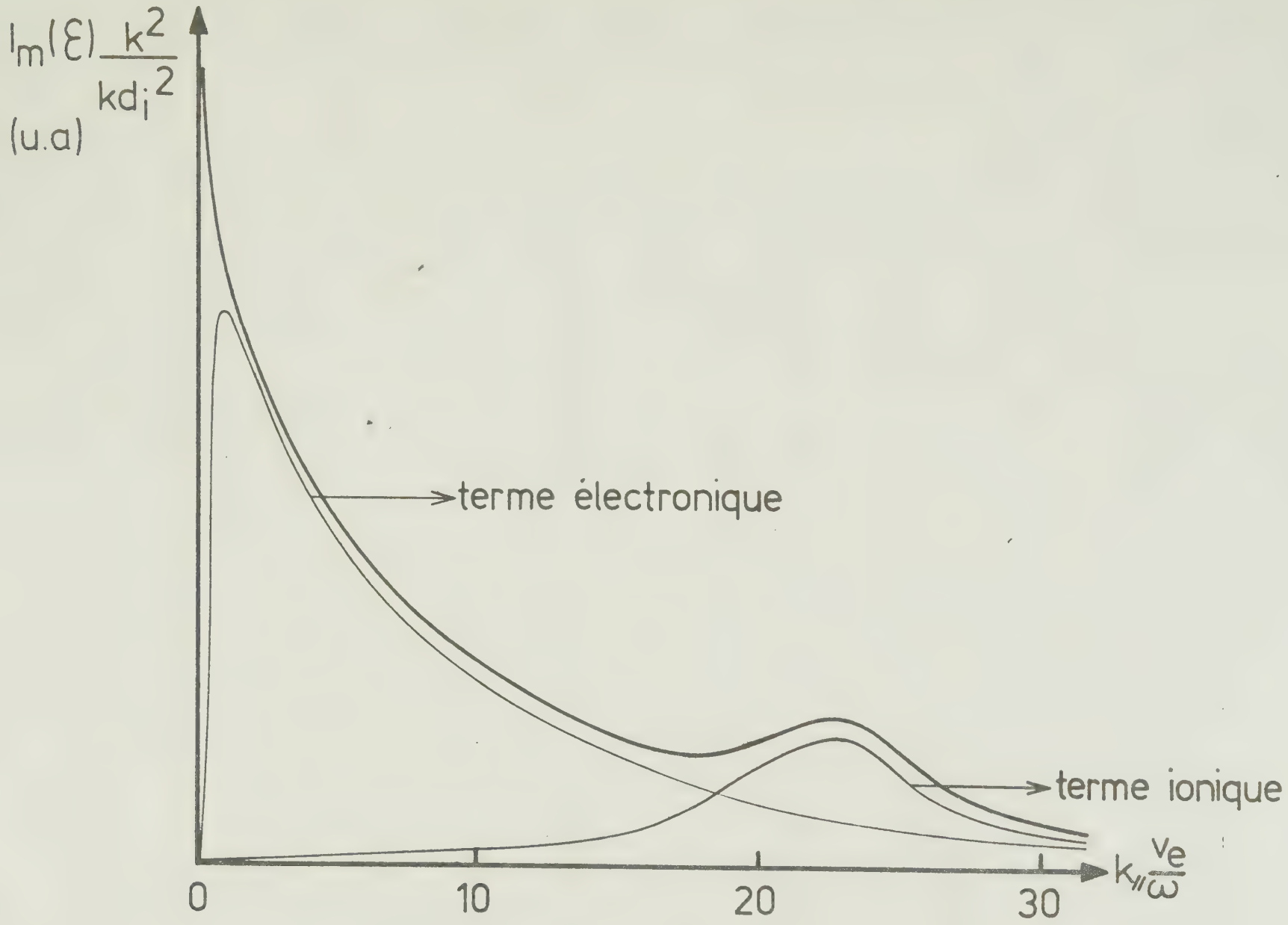


Figure 7 : Allure approximative de la partie imaginaire de la relation de dispersion autour d'une harmonique cyclotronique ionique pour un plasma à une seule espèce ionique.

En effet ,lorsque K// diminue ,l'amortissement sur les électrons augmente et l'amortissement cyclotron sur les ions diminue.

-Ondes longitudinales obliques .

Il semble utile à ce stade d'effectuer une revue des différentes ondes longitudinales susceptibles de se propager dans un magnéto plasma d'après J.P.M Schmitt (5).Cette revue est nécéssaire pour la suite pour préparer une observation expérimentale.
Les ondes électrostatiques sont classées,par exemple,suivant leur angle de propagation relativement au champ magnétique,les zones angulaires étant délimitées par une modification de l'amortissement.Si $\Theta=(\hat{K},\hat{B})$.

$\Theta = \pi/2$ -onde de Bernstein ioniques.

$0 \leq \cos\Theta \ll \frac{\lambda}{\rho_i}\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}$ -ondes de Bernstein ioniques pures: amortissement cyclotron sur les ions si $\omega=\omega_{ci}$.

$\frac{\lambda}{\rho_i}\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \leq \cos\Theta$ -ondes de Bernstein ioniques intermédiaires: amortissement Landau sur les électrons et cyclotron sur les ions.

$\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2}\frac{\lambda}{\rho_i} \ll \cos\Theta \ll \frac{\lambda}{\rho_i}$ -ondes de Bernstein quasi-neutralisées:amortissement cyclotron sur les ions.

$\cos\theta \sim \sin\theta$ - ondes ioniques obliques : amortissement Landau et cyclotron sur les ions.

$\sin\theta \ll \frac{\lambda}{\rho_i}$ - ondes ioniques classiques : amortissement Landau sur les ions.

-Ondes électromagnétiques perpendiculaires.

On peut utilement ici faire également une revue des ondes électromagnétiques cette fois présentes dans un magnétoplasma : la revue de ces ondes est passablement plus compliquée que dans le cas électrostatiques et le "démêlage" des modes a été entrepris assez récemment (1972) par Kaladze, Lominadze et Stepanov (6b). Les ondes d'Alven sont automatiquement exclues des ondes électrostatiques lorsque l'on fait l'approximation longitudinale. On peut alors classer les ondes électromagnétiques suivant la terminologie usuelle, c'est à dire suivant leur polarisation : transversale pour les ondes ordinaires et mixte (ni purement longitudinale, ni purement transversale) pour les ondes extraordinaires. Les figures 8 et 9 empruntées aux auteurs cités montrent la complexité dela dispersion, seules les courbes obtenues à très faible β (β est le rapport de la pression cinétique à la pression magnétique) nous intéressent ici puisque $\beta \lesssim 10^{-6}$ dans les Tokamaks. En résumé : pour les ondes ioniques

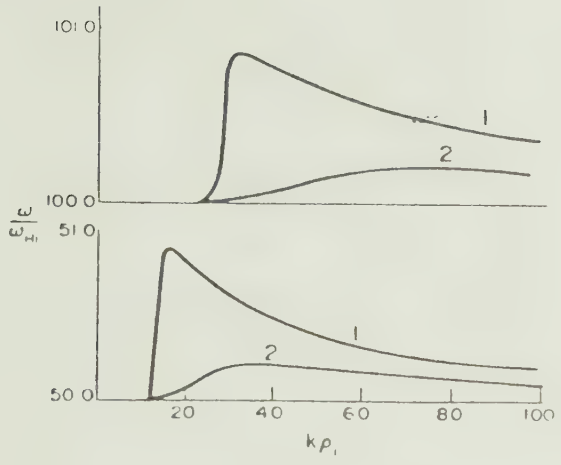


Fig. 10 Dependence of the frequencies of extraordinary ion cyclotron waves of high harmonic number (51st and 101st harmonics) on the wave vector. Curves 1 and 2 correspond respectively to β_i values of 0.1 and 1.

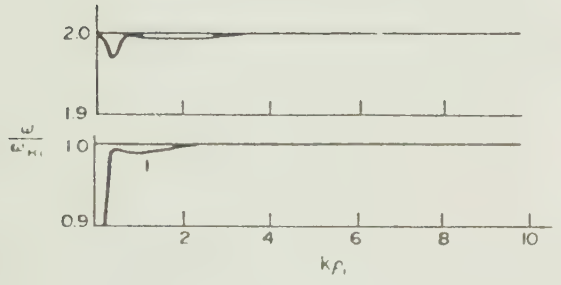


Fig. 9 Dependence of the frequencies of extraordinary ion cyclotron waves on the wave vector, for β_i = 0.1, in the region of small $k\rho_i$ values.

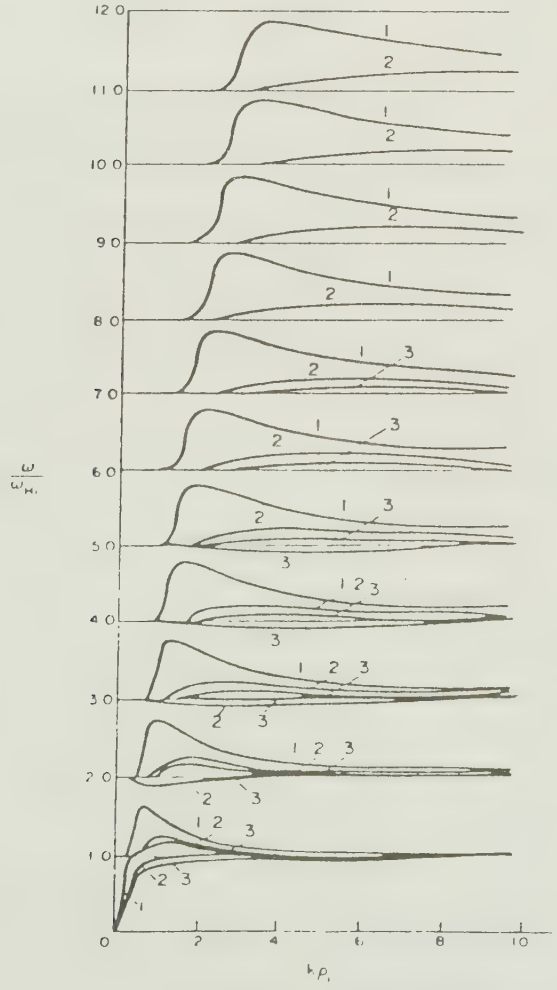


Fig. 8 Dependence of the frequencies of extraordinary ion cyclotron waves on the wave vector. Curves 1–3 correspond respectively to β_i values of 0.1, 1 and 10 (ref. [41]).

Ondes ordinaires : c'est ici relativement simple on a sensiblement pour ces modes :

$$\omega \simeq m\Omega_i \left(1 - \frac{\beta_i}{\Lambda_i + \frac{m_i}{m_e}\beta_i}\Gamma_m(\Lambda_i)\right) \qquad \text{où} \quad \beta_i = \frac{n k T_i}{\frac{B^2}{2\mu_0}}$$

Ondes extraordinaires : c'est très compliqué (surtout si $\beta \ll 1$) et la dispersion est montrée sur les figures, on peut dire qu'il y a deux types de solutions :

pour $m \leq \frac{\omega}{\Omega_i} < m+1$ l'une des solutions est proche de $(m+1)\Omega_i$ avec les limites :

$k\rho_i \to 0$ ou $k\rho_i \to \infty$: $\omega \to (m+1)\Omega_i$

la polarisation devient purement transverse : si $k\rho_i \to \infty$

l'autre solution a pour asymptote $m\Omega_i$ si $k\rho_i \to 0$ ou $k\rho_i \to \infty$

si $k\rho_i \to \infty$: la polarisation est longitudinale.

si $0 \leq \frac{\omega}{\Omega_i} < 1$ Il y a une seule solution : ce sera une onde d'Alven $\omega = kV_A$ où $V_A = \frac{B_0}{(\mu_0 n_i m_i)^{1/2}}$ qui se transforme directement en onde cyclotronique. Cette onde d'Alven existe même si $k\rho_i \gtrsim 1$

Il faut noter que l'angle de propagation est voisin de la perpendiculaire à B .

Conclusion : ces ondes extraordinaires peuvent devenir purement longitudinales mais seulement dans les cas asymptotiques. Elles ne doivent pas être confondues avec les ondes de Bernstein, d'ailleurs les bandes passantes sont très différentes : comme le montre la figure 10 pour des harmoniques très élevées (pour lesquelles les bandes passantes correspondantes sont très faibles pour "nos" ondes de Bernstein ioniques).
En fait il se trouve que l'on n'a pas vraiment le droit de découpler les modes longitudinaux et transverses en présence de champ magnétique, et il faudrait résoudre le tenseur diélectrique en entier.

Conclusion de ce chapitre :

Nous verrons que les fluctuations de densité sont essentiellement transportées par les modes électrostatiques et que parmi ceux-ci les seuls modes qui seront susceptibles de fournir une détermination précise de la température ionique seront justement les modes de Bernstein quasi-neutralisés que l'on vient de décrire ; il importait donc de rappeler leurs propriétés.

Références du Chapitre I

[1] TFR Group , Nuclear Fusion 18,5, 647 (1978).

[2] M.R. Green, P.D. Morgan, M.R. Siegrist, R.L. Watterson, Ecole Polytechnique de Lausanne, LRP 168/80, Juin 1980.

[3] J.D.E. Evans, Plasma Phys. 12, 573 (1970).

[4] Watson, a Treatise of Bessel Fonctions, Cambridge University Press (1968).

[5] J.P.M. Schmitt, Thèse d'état, Paris (1973).

[6] R.F. Lutomorski, Phys. Fluids 13, 149 (1970).

(6b) T.D Kaladze,D.G. Lominadze,K.N. Stepanov,Sov Phy Tech Phy,17, 196 (1972).

-D.G. Lominadze,Cyclotron Wves in Plasma,Pergamon Press,Sydney (1981).

CHAPITRE II

Pages

II. CALCUL DE LA DENSITE SPECTRALE DES FLUCTUATIONS DE DENSITE ELECTRONIQUE : $S(k,\omega)$. 31

Annexe 1 : Application de cas d'un champ magnétique. 41

Références. 45

II. Calcul de la densité spectrale des fluctuations de densité électronique :S(K,W).

L'importance cruciale de ce facteur de forme S(K,W) apparaîtra bientôt ,car il constitue en fait le spectre diffusé par les électrons du plasma sous l'effet des fluctuations de densité du milieu.Dans ce traitement on néglige les phénomènes de rayonnement propres au plasma pour ne considérer que la diffusion subie par des ondes électromagnétiques injectées de l'extérieur,nous verrons beaucoup plus loin comment il est possible de séparer le rayonnement diffusé du rayonnement spontané dans une expérience de diffusion.Nous allons calculer ce facteur de forme par la méthode des particules habillées primitivement introduite par Rostoker pour un plasma homogène (1).C'est une des méthodes de calcul possibles car on peut aussi utiliser la théorie cinétique ou même le théorème Fluctuation-Dissipation,nous choisissons la première méthode en raison de sa simplicité et de son sens intuitif,mais auparavant nous allons montrer porquoi c'est "difficile" de calculer le facteur de forme par la théorie cinétique classique.

La définition de S(k,w) est donnée dans tous les ouvrages de diffusion ,voir par exemple Sheffield (2),par:

$$S(\vec{k},\omega) = \lim_{\substack{V\to\infty \\ T\to\infty}} \frac{1}{VT} \left\langle \frac{\delta n_e(\vec{k},\omega)\, \delta n_e^*(\vec{k},\omega)}{n_{oe}} \right\rangle \qquad (1)$$

Il est à noter que cette définition diffère d'un facteur deux suivant les auteurs et suivant la définition de S comme un facteur de forme ou comme une densité spectrale.

Ici V désigne le volume de diffusion ,Noe est le nombre

- total d'électrons diffuseurs dans le volume accessible

(noe=Noe/V) T est un temps de mesure expérimental.

&ne(K,W) est la transformée de Fourier-Laplace de la fluctuation de densité, et < > signifie que l'on prend la moyenne spatio-temporelle sur V,T, et surtout une moyenne d'ensemble(ou stati-) - stique

Si nous reprenons la théorie cinétique linéaire qui nous a permis de calculer la constante diélecrique du plasma au paragraphe prédédent, on peut à présent évaluer &ne(K,W) et essayer de calculer S(K,W) ;on a en effet: (voir cha I et sa réf 5)

$$\delta n_s(\bar{k},\omega) = -2\pi \frac{q_s}{m_s} V(\bar{k},\omega) \int_0^{\infty} v_\perp dv_\perp \int_{-\infty}^{+\infty} dv_\parallel \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_n^2(\beta)}{\alpha - n} \left(\frac{n}{v_\perp} \frac{\partial f_{os}}{\partial v_\perp} + \frac{k_\parallel}{\Omega_s} \frac{\partial f_{os}}{\partial v_\parallel} \right] \quad (2)$$

où les notations sont "standards" et ont déja été utilisé ,avec de plus: $\alpha = \omega - k_\parallel v_\parallel$ et $\beta = \frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_s}$

V(k,w) est la transformée de Fourier-Laplace du potentiel V(r,t) associé aux modes fluctuants. On peut expliciter &ne(k,w) pour des fonctions de distribution maxwelliennes:

$$\delta n_s(\bar{k},\omega) = -\frac{2 q_s}{m_s} \frac{n_{os}}{v_s^2} V(\bar{k},\omega) \left(1 - G_{\frac{\omega}{\Omega_s}}(\Lambda_s, M_s) \right) \quad (3)$$

avec $\Lambda_s = \frac{k_\perp^2 v_s^2}{2\Omega_s^2}$ et $M_s = \frac{k_\parallel^2 v_s^2}{2\Omega_s^2}$

où : $$G_\omega(z,x) = -i\omega \int_0^{\infty} e^{-z(1-\cos\theta) - x\frac{\theta^2}{2} + i\omega\theta} d\theta \quad (4)$$

$G_\omega(Z,X)$ est l'intégrale de Gordeyev (7).

On peut montrer facilement qu'une forme équivalente pour G est

$$G_{\frac{\omega}{\Omega_s}}(\Lambda_s, M_s) = -\sum_n \beta_{os} Z(\beta_{ns}) \Gamma_n(\Lambda_s) \quad (4b) \begin{cases} \beta_{ns} = \frac{\omega - n\Omega_s}{k_\parallel v_s} \\ \Gamma_n(\Lambda_s) = I_n(\Lambda_s) e^{-\Lambda_s} \end{cases}$$

donc ,on peut calculer formellement le facteur de forme :

$$S_e(\bar{k},\omega) = \lim_{\substack{V\to\infty \\ T\to\infty}} \frac{1}{VT n_{oe}} \left(\frac{2 q_e}{m_e} \frac{n_{oe}}{v_e^2} \right)^2 < V(\bar{k},\omega) V^*(k,\omega) >$$

$$\times \left(1 - G_{\frac{\omega}{\Omega_e}}(\Lambda_e, M_e) \right) \left(1 - G^*_{\frac{\omega}{\Omega_e}}(\Lambda_e, M_e) \right) > \quad (5)$$

La difficulté réside dans l'évaluation de la moyenne statistique pour calculer les corrélations de potentiel;c'est ici qu'interviennent différentes méthodes:

on se souvient que l'on avait introduit un terme source dans l'équation de Poisson:$S(k,\omega)$ tel que $V(k,\omega)=S(k,\omega)/\varepsilon(k,\omega)k^2\varepsilon_0$.

Il faut donc calculer ce terme source;c'est ce que propose le théorème Fluctuation-Dissipation en maintenant l'équilibre du système en agissant de l'extérieur (imposer une perturbation externe et regarder la réponse du système).Le concept de particules habillées procède de la même manière ,mais en agissant depuis l'intérieur du plasma,on va maintenant décrire ce procédé:

Ce concept consiste à singulariser une particule chargée du plasma(particule test) et à la considérer comme une perturbation de charge induisant une perturbation de champ électrique donc une fluctuation de densité.On cherche ensuite la réponse des autres particules à cette perturbation.Le terme de source est alors tout trouvé et il s'écrit ,à condition de faire l'"ANSATZ" suivant(découplage des vitessses et des positions):

$$(6)\quad S(\vec{r},t) = q_{test}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0(t))\,\delta(\vec{v}-\vec{v}_0(t)) \qquad \begin{matrix}(t=0)\\(t=0)\end{matrix}$$

(la perturbation résultant à $t=0$)

D'où $S(\vec{k},\omega) = (2\pi)\,q_{test}\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}(0)}\,\delta(\omega-\vec{k}\cdot\vec{v}_0)$ (si $\vec{\theta}=0$)

ou $S(\vec{k},\omega) = (2\pi)\,q_{test}\,e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}(0)}\sum_n \delta(\omega-n\Omega_c)\,J_n^2(\beta)$ (si $\vec{\theta}\neq 0$)

Remarquons que cet Ansatz limite sérieusement la portée de la méthode ici utilisée ,et il ne serait clairement plus valable sous cette forme dans un plasma "turbulent".

Après avoir défini le terme source à l'aide des particules test il s'agit "d'habiller"ces particules test pour calculer le facteur de forme.Disons avant tout quelques mots d'historique sur les particules habillées en physique des plasmas.Elles sont liées à des observations expérimentales:les premières observations concernant la diffusion incohérente d'ondes radio dans l'ionosphère ont été faites par Bowles en 1958 et 1959.Le rayonnement rétrodiffusé présentait les caractéristiques suivantes:la section efficace de diffusion était celle de la diffusion Thomson par les électrons mais l'élargissement Döppler de la raie était très faible,de l'ordre de la vitesse thermique des ions multipliée par le nombre d'onde sur lequel se faisait la diffusion,alors que l'on attendait à priori un élargissement proportionnel au produit K*Ve (où Ve est la vitesse thermique des électrons),ceci,en plus du fait que l'amplitude de la section efficace était inférieure d'un facteur 1/2 nontrivial à la valeur classique(facteur qui a été justifié par les auteurs des références 3 et 4),a conduit au concept de particules fictives diffusant comme des électrons mais reflétant les caractéristiques des autres particules présentes dans le milieu ,ici en l'occurence les ions.
Le principe d'habillement est certainement applicable à un plasma stable à l'équilibre stationnaire.On considère une particule test(chargée dans un plasma) qui induit autour d'elle un nuage de polarisation.Il faut que ce nuage soit bien défini à tout instant,ceci impose en particulier que le temps de collision τ_i de la particule test avec une autre particule soit très supérieur au temps d'établissement du nuage τ_m(correspondant au temps d'établissement d'une corrélation entre paires de particules) la condition $\tau_i \gg \tau_m$ est bien vérifiée pour un plasma stable de paramètre $1/n\lambda_d^3$ petit devant un (λ_d est la longueur de Debye et n

la densité du plasma) voir (5) .

A présent on doit faire la moyenne statistique impliquée par la définition du facteur de forme (ce qui suppose une hypothèse d'ergodicité pour passer d'une moyenne temporelle à une moyenne statistique),on somme alors les contributions des différentes particules test considérées comme indépendantes ,les corréla - tions ayant été prises en compte dans l'habillage.

Soit donc une particule test d'espèce s et soit $n_j^{nue}(r,t)$ la densité discrète qui lui est associée ,de transformée de Fourier Laplace $n_j^{nue}(k,\omega)$.Le terme de fluctuation de densité électroni que habillée est obtenue comme étant la contribution de deux te -mes.Un terme que l'on notera $n_{e,j}^{hab,e}(k,\omega)$ dûe au mouvement thermi- que des électrons eux-mêmes perturbés par les champs électriques fluctuants associés. Le second terme $n_{e,j}^{hab,i}(k,\omega)$ provient de la réponse des électrons à une fluctuation de densité ionique.

Si l'on reprend la formule donnant la fluctuation de densi- té électronique ,on s'aperçoit que d'un point de vue homogénéi- té ,cette formule s'écrit: (cette formule est d'ailleurs exacte)

$$S_{ne}(k,\omega) = \frac{\chi_e(\vec{k},\omega)}{\epsilon(\vec{k},\omega)} \quad \frac{k^2 \epsilon_0 V_{test}}{n_e q_e} \qquad (7)$$

$$(\text{où } V_{test} = \frac{S}{\epsilon(k,\omega)} \frac{1}{k^2})$$

où l'on a réintroduit les suceptibilités dans l'approximation longitudinale: $\chi_s(k,\omega) = \vec{k} \cdot \bar{\bar{\chi}} \cdot \vec{k}$ ($\bar{\bar{\chi}}$ n'est pas un scalaire)

$$\chi_s(k,\omega) = \frac{\vec{k}}{k^2} \omega_{ps}^2 \int \frac{\partial f_{os}}{\partial v} \sum_n \frac{J_n^2(\beta)}{\omega - n} d^3v \quad (8) \quad \text{et} \quad \epsilon = 1 + \sum_s \chi_s .$$

On peut à présent réaliser l'habillage des particules:le terme $n_{e,j}^{hab,i}(k,\omega)$ est exactement égal à:

$$n_{e,j}^{hab,i}(k,\omega) = \frac{\chi_e}{\epsilon} \; n_j^{i,nue}(k,\omega) \qquad (9)$$

car on remarquera que le terme $\left(\frac{k^2 \epsilon_0 V_{test}}{n_{os} q_s}\right)$ est justement égal à $n_j^{s,nue}$

Ce terme s'interprète simplement en disant que les électrons répondent à une fluctuation de champ électrique induite par les ion avec une susceptibilité écrantée ; l'autre terme se calcule de la même façon ,on a cette fois:

$$n_{e,j}^{hab,e} = n_j^{e,nue}(\bar{k},\omega)\left\{1 - \frac{\chi_c(\bar{k},\omega)}{\varepsilon(\bar{k},\omega)}\right\} \quad (10)$$

le terme unité traduit la réponse d'un électron libre à une perturbation de champ électrique induite par un autre électron comme s'il n'était pas écranté ,et le second terme retranche la contribution d'écrantage dûe aux autre électrons.

Si l'on voulait évaluer de même le terme de fluctuation de densité ionique habillée on obtiendrait:

$$n_{i,j}^{hab} = n_{i,j}^{hab,i} + n_{i,j}^{hab,e}$$

$$\text{soit} \quad n_{i,j}^{hab,i} = n_j^{i,nue}\left(1 - \frac{\chi_i}{\varepsilon}\right) \qquad n_{i,j}^{hab,e} = n_j^{e,nue}\left(\frac{\chi_i}{\varepsilon}\right)$$

Remarque:il existe d'autre justifications possibles plus calculatoires dûes à Féjer (4) et à Grewal (5).Féjer utilise le concept de particule test neutre (très utile pour calculer un facteur de forme dans un gaz neutre) et décompose la fluctuation de densité en un terme insensible au champ électrique et un second sensible au champ fluctuant.Grewal utilise les particules chargées et la rétroaction du champ induit sur les particules qui l'ont engendré.Pour des démonstrations plus intuitives voir également Ichimaru (5) et Békefi (8).

$$Sne(\vec{k},\omega) = \sum_{j=1}^{Ne} n_{eij}^{e\ nue}(\vec{k},\omega)(1-\frac{Xe}{\varepsilon}) + \sum_{s\neq e} Z_s[\sum_{j=1}^{Ns} n_j^{s(nue)}(\vec{k},\omega)\ \frac{Xe}{\varepsilon}]$$

(on a sorti la charge Zs de la définition)

ceci fournit, l'expression de $S_e(\vec{k},\omega)$:

$$Se(\vec{k},\omega) = \lim_{T,V\to\infty} \frac{1}{VT} \{|1-\frac{Xe}{\varepsilon}|^2 <|\sum_{j=1}^{Ne} n_j^{e\ nue}(\vec{k},\omega)|^2>$$

$$+ |\frac{Xe}{\varepsilon}|^2 <|\sum_{s\neq e} Z_s \sum_{j=1}^{Ns} n_j^{s\ nue}(\vec{k},\omega)|^2> + 2\ Ree[(1-\frac{Xe}{\varepsilon})(\frac{Xe}{\varepsilon})$$

$$< \sum_{j=1}^{Ne} n_j^{e\ nue}(\vec{k},\omega) \times \sum_{s\neq e} Zs \sum_{j\neq 1}^{Ns} n_j^{*s\ nue}(\vec{k},\omega) >$$

En fait ici $Se(\vec{k},\omega)$ va s'écrire simplement :

$$Se(\vec{k},\omega) = \lim_{T,V\to\infty} \frac{1}{VT} \{|1-\frac{Xe}{\varepsilon}|^2 <|\sum_{j=1}^{Ne} \frac{n_j^{e\ nue}(\vec{k},\omega)}{noe}|^2) +$$

$$|\frac{Xe}{\varepsilon}|^2 \sum_{s\neq e} Z_s^2 < |\sum_{j=1}^{Ns} \frac{n_j^{s\ nue}(\vec{k},\omega)}{noe}|^2 >\}.$$

En effet on néglige la "recorrélation" entre particules habillées qui consisterait à garder les termes croisés pour des particules d'espèce différente. C'est le principe de superposition des particules habillées et le fait que le résultat soit ainsi exact fait en particulier la force de ce concept.

Revenons à l'expression du facteur de forme et explicitons le dans le cas simple qui nous occupe d'un plasma illimité plongé dans un champ magnétique uniforme. Le calcul détaillé est fait à l'annexe I. Remarquons cependant qu'il faut faire une dernière hypothèse qui consiste à négliger les corrélations <u>initiales</u> entre les particules; en effet, dans l'évaluation de $< \left| \sum_{j=1}^{Ne} n_{e_j}^{mue}(k,\omega) \right|^2 >$ par exemple, on a :

$$n_{e_j}^{mue}(k,\omega) = 2\pi \sum_n J_n^2(\beta)\, \delta(\alpha - n)\, e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}_j(0)} \qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\omega - k_{//}v_{//}}{\Omega_e} \\ \beta = k_\perp v_\perp / \Omega_e \end{cases}$$

Limitons nous pour simplifier au cas B=0, le principe du calcul étant le même

$$n_{e_j}^{mue}(k,\omega) = 2\pi\, \delta(\omega - kv_j)\, e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}_j(0)}$$

alors : $< \left| \sum_{j=1}^{Ne} n_{e_j}^{mue}(k,\omega) \right|^2 > = (2\pi)^2 \sum_{i,j} \delta(\omega - kv_i)\, \delta(\omega - kv_j)\, e^{i\bar{k}(\bar{r}_i(0) - \bar{r}_j(0))}$

$$= (2\pi)^2 \sum_{i=1}^{N_i} \delta(0)\, \delta(\omega - kv_i) \; +$$

$$+ (2\pi)^2 \sum_{i=1}^{Ne} \sum_{j=1}^{Ne-1} \delta(\omega - kv_i)\, \delta(\omega - kv_j)\, e^{i\bar{k}(\bar{r}_i(0) - \bar{r}_j(0))} \qquad (14)$$

comme $S = \lim_{V,T\to\infty} \frac{1}{VT} < \left| n_{e_j}^{mue}(k,\omega) \right|^2 >$ et $\lim_{T\to\infty} \frac{\delta(0)\,2\pi}{T} = 1$ on a :

$$S(k,\omega) = \left| \frac{1+\chi_i}{\varepsilon} \right|^2 F_e(k,\omega) + \left| \frac{\chi_e}{\varepsilon} \right|^2 \sum_{s=i} F_s(k,\omega)$$

$$F_s(k,\omega) = Z_s^2\, 2\pi \int d^3v_i\, \delta(\omega - kv_i) f_{os}(\bar{v}_i) + \lim_{V,T\to\infty} \frac{(2\pi)^2 (N-1)}{T} \cdot$$

$$\cdot \int d^3v_i\, f_{os}(v_i) f_{os}(v_j)\, \delta(\omega - kv_i)\, \delta(\omega - kv_j) < e^{i\bar{k}\cdot(\bar{r}_i(0) - \bar{r}_j(0))} > \qquad (15)$$

Tout le problème statistique réside dans l'évaluation du terme entre crochets de l'expression précédente.

Le résultat de l'annexe 1 pour B≠o en négligeant les corrélations initiales est :

$$S_e(k,\omega) = 2\sqrt{\pi} \left\{ \left| 1 - \frac{\chi_e}{\varepsilon} \right|^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma_n(\lambda_e)}{|k_{//}|v_e} e^{-\left(\frac{\omega - n\Omega_e}{k_{//}v_e}\right)^2} + \sum_{s\neq e} \frac{n_s}{n_e} Z_s^2 \left| \frac{\chi_e}{\varepsilon} \right|^2 \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \sum_n \frac{\Gamma_n(\lambda_s)}{|k_{//}|v_s} e^{-\left(\frac{\omega - n\Omega_s}{k_{//}v_s}\right)^2} \right\}$$

On voit donc qu'il faut encore évaluer les corrélations initiales entre les particules, le second terme de la formule précédente donnerait une diffusion cohérente par un terme proportionnel au carré du nombre de particules présentes ; cependant si l'on fait l'approximation des phases aléatoires pour les corrélations initiales on pourra négliger ce second terme. On montre que cette dernière approximation est possible pour un plasma stable voisin de l'équilibre thermique pour chaque espèce de particules (voir par exemple (2) où l'on montre que ce terme est d'ordre $1/\omega_{pe} * T$ qui est très petit si le temps d'observation est suffisamment long). Il n'en serait pas nécéssairement de même pour l'étude des corrélations initiales dans un plasma "turbulent", loin de l'équilibre thermodynamique.

Faisons une remarque pour finir : cette méthode des particules habillées se trouve être exactement équivalente, tout au moins pour un plasma stable, à la recherche du facteur de forme à l'aide de la théorie cinétique, ceci apparaît très clairement lorsque l'on écrit le facteur de forme comme étant relié à la fonction de corrélation de paires de particules, ce qui est très facile à obtenir, et on établit : (5)

$$S_e(k,\omega) = \frac{N_e}{2n} \int_V d^3r \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \left(\rho_s(\vec{r},t) + \frac{N_e}{V} p(\vec{r},t) \right)$$

p est la fonction de paire et ρ_s la probabilité de trouver une particule à l'instant dans d^3r autour de la position $\vec{r}$.

Ainsi le traitement cinétique usuel consisterait à aller à l'équation d'ordre deux de la hiérarchie BBGKY, pour calculer cette fonction de corrélation de paires. Ce qui est finalement remarquable c'est que l'équation de Vlasov qui ne prend en compte que les corrélations spatiales et pas les corrélations statistiques par définition même de celle-ci (négliger la fonction de corrélation de paires est bien justifié si le paramètre de developpement $1/n\lambda_d^3$ est très petit devant un) permet cependant de "restau

rer" ces corrélations dans le calcul de S(k,ω) par les particules habillées.La cohérence des deux démarches esr respectée en tout cas car l'approximation des phases aléatoires (RPA) tire également sa validité de la condition $1/n\lambda^3$ petit devant l'unité. Remarquons pour finir que l'on a utilisé partout la décorrélatio entre vitesses et positions en factorisant systématiquement les fonctions de ces deux facteurs ce qui n'a rien d'évident et ce qui rendrait très certainement impropre le calcul du facteur de forme si l'on voulait traiter le cas du rayonnement"spontané" du plasma.

Conclusion de ce chapitre:Cette partie nous a permit de rappeler les notions de base sur lasquelles vont s'appuyer les considérations des chapitres ultérieurs.

Annexe I du chapitre II.

Calcul de la densité spectrale de fluctuations de densité électroni-que.

Application au cas d'un champ magnétique

En première approximation, on va considérer un champ uniforme de direction repéré par l'indice // . Les trajectoires des particules chargées sont alors des hélices : la $j^{ième}$ particule de l'espèce s à une trajectoire repérée par $\vec{r}_j(t)$:

$$\vec{r}_j(t) = \vec{r}_j(o) + v_{//} t\, \vec{e}_{//} + \rho_s \vec{u}(t) \begin{cases} \vec{u}(t) = \cos \varphi_j(t)\, \vec{e}_{\perp 1} + \sin \varphi_j(t) \vec{e}_{\perp 2} \\ \varphi_j = \Omega_s t + \varphi_{oj} \quad \Omega_s = \dfrac{|Z_s e| B}{ms} \end{cases}$$

$(\vec{e}_{\perp 1}, \vec{e}_{\perp 2}, \vec{e}_{//})$ forme un trièdre direct, avec $\vec{B} // \vec{e}_{//}$

$\vec{k}.\vec{r}_j(t) = \vec{k}.\vec{r}_j(o) + v_{//} k_{//} t + \rho_s k_\perp \cos \varphi_j(t)$ en choissisant $\vec{k}$ dans le plan $(\vec{e}_{\perp 1}, \vec{e}_{//})$.

$$n_j^{nue}(\vec{r},t) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_j(t))$$

$$n_j^{nue}(\vec{k},t) = e^{-i\vec{k}.\vec{r}_j(t)} (2\pi)$$

$$n_j^{s(nue)}(\vec{k},\omega) = (2\pi) \int_{-T/2}^{+T/2} dt\; e^{-i\vec{k}.\vec{r}_j(o)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Jn(k_\perp \rho_s)$$

$$e^{-i(k_{//} v_{//} + n\Omega s - \omega)t}\; e^{i\varphi_{oj} n}\, e^{ni\pi/2}$$

(on a développé $e^{ik_\perp \rho s \cos \mathcal{C}(t)}$ en série de fonction de Bessel)

$$n_j^{s(nue)}(\vec{k},\omega) = 2\pi i \sum_n \delta_T(\omega-(k_{//}v_{//}+n\Omega s))\, Jn(k_\perp \rho s) e^{in(\mathcal{C}oj+\pi/2)} \; e^{-i\vec{k}\vec{r}j(o)}$$

on effectue une moyenne sur les distributions des vitesses des particules au lieu de $\sum_{j=1}^{Ns}$ -

$$\text{alors } Se(\vec{k},\omega) = \lim_{V,T\to\infty} \{|1-\frac{\chi e}{\epsilon}|^2 \frac{4\pi^2}{noeVT} \int foe(\vec{v})\, d^3v \sum_{nm} Jn(k_\perp \rho e) Jm(k_\perp \rho e$$

$$\times S_T(\omega-(k_{//}v_{//}+n\Omega e))\; S_T(\omega-(k_{//}v_{//}+m\Omega e))\; e^{i(n-m)(\mathcal{C}+\pi/2)}$$

$$+ \frac{4\pi^2}{noeVT} \sum_{s\neq e} Z_s^2 |\frac{\chi e}{\epsilon}|^2 \int fos(\vec{v})\, d^3v \sum_{nm} Jn(k_\perp \rho s) Jm(k_\perp \rho s) \delta_T(\omega-(k_{//}v_{//}+n\Omega s))$$

$$\times S_T(\omega-(h_{//}v_{//}+m\Omega s))\; e^{i(n-m)(\mathcal{C}+\pi/2)}$$

l'intégration en coordonnées cylindriques, sur $d\mathcal{C}$ donne :
Il s'agit en fait d'une moyenne statistique sur les phases initiales

$$\int_o^{2\pi} e^{i(n-m)\mathcal{C}} d\mathcal{C} = 2\pi \delta^{kronecker}_{n,m}$$

la fonction δ_T n'est pas une vraie fonction δ de Dirac :

on a $\lim_{T\to\infty} [\delta_T / \frac{T}{2\pi}] = 1$

$$\lim_{T\to\infty} \delta_T\, \delta_T \simeq \lim_{T\to\infty} \frac{T}{2\pi} \delta_T .$$

On effectue donc le passage à la limite pour T et l'intégration en $d\mathcal{C}$, il reste :

$$Se(\vec{k},\omega) = \lim_{V\to\infty} \frac{2\pi}{noeV} \{ \left|1-\frac{Xe}{\varepsilon}\right|^2 \int dv_{//} v_\perp dv_\perp \sum_n Jn^2(k_\perp \rho e) foe(\vec{v}) \delta(\omega - k_{//} v_{//} - n\Omega e$$

$$+ \sum_{s\neq e} Z_s^2 \left|\frac{Xe}{\varepsilon}\right|^2 \int dv_{//} v_\perp dv_\perp \sum_n Jn^2(k_\perp \rho s) fos(\vec{v}) \delta(\omega - k_{//} v_{//} - n\Omega s) \}$$

en prenant des fonctions de distribution maxwelliennes, on obtient ici le facteur de forme électronique pour des fluctuations purement statistiques (thermiques) du plasma :

$$fos(v) = \frac{nos}{(\pi Vs^2)^{3/2}} e^{-\frac{v^2}{v_s^2}}$$

Intégration en $v_{//}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dv_{//} \, e^{-(\frac{v_{//}}{Vs})^2} \delta(\omega - n\Omega s - k_{//} v_{//}) = \frac{1}{|k_{//}|} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_{//} \, e^{-(\frac{v_{//}}{Vs})^2} S\left(\frac{\omega - n\Omega s}{k_{//}} - v_{//}\right)$$

$$= \frac{1}{|k_{//}|} e^{-(\frac{\omega - n\Omega s}{k_{//} vs})^2} = F_n(\omega, k_{//})$$

Intégration en $v_\perp$:

$$\int_0^\infty v_\perp dv_\perp \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Jn^2(k_\perp \rho s) \, e^{-(\frac{v_\perp}{Vs})} Fn(\omega, k_{//}) = \frac{Vs^2}{2} e^{-\Lambda s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} In(\Lambda s) Fn(\omega, k_{//})$$

Finalement :

$$Se(\vec{k},\omega) = 2\sqrt{\pi} \{ \left|1-\frac{Xe}{\varepsilon}\right|^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{In(\Lambda e) \, e^{-\Lambda e} \, e^{-(\frac{\omega - n\Omega e}{k_{//} ve})^2}}{|k_{//}| Ve}$$

$$+ \sum_{s\neq e} \frac{ns}{ne} \left|\frac{Xe}{\varepsilon}\right|^2 Z_s^2 \sum_n \frac{In(\Lambda s) e^{-\Lambda s}}{|k_{//}| Vs} e^{-(\frac{\omega - n\Omega s}{k_{//} vs})^2} \}$$

avec $\varepsilon(\vec{k},\omega) = 1 + \sum_s Xs(\vec{k},\omega)$

$$Xs(\vec{k},\omega) = \frac{\omega_{\rho s}^2}{n_{os} k^2} \int \left(\frac{n\Omega s}{v_\perp} \frac{\partial fos}{\partial v_\perp} + k_{//} \frac{\partial fos}{\partial v_\perp}\right) \sum_n \frac{Jn^2(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega s}) d^3v}{\omega - n\Omega s - k_{//} v_{//}}$$

dans le cas d'une seule espèce ionique Zi fois chargée le deuxième terme de Se s'écrit :

$$\frac{ni}{ne} Zi^2 \left|\frac{Xe}{\epsilon}\right|^2 \sum_n \frac{In(\Lambda s)}{|k_{//}|Vs} e^{-\Lambda s} e^{-\left(\frac{\omega - n\Omega s}{k_{//}Vs}\right)^2} \quad (s=i)$$

et comme ne = niZi, on retrouve l'expression de Sheffield [2] :

$$Zi \left|\frac{Xe}{\epsilon}\right|^2 \sum_n \frac{In(\Lambda i)}{|k_{//}|Vi} e^{-\Lambda i} e^{-\left(\frac{\omega - n\Omega i}{k_{//}Vi}\right)^2}$$

le traitement cinétique usuel fournit le même résultat. Insistons sur le fait que le terme en $|k_{//}|$ apparaissant au dénominateur assure que Se est toujours positif, ce qui est une conséquence de la causalité.

Dans le cas où il existe une vitesse de dérive électronique par exemple Vde, on remplace :

$$zne = \frac{\omega - n\Omega e}{k_{//} Ve} \quad \text{par} \quad zne = \frac{\omega - k_{//} Vde - n\Omega e}{k_{//} Ve}$$

Références du chapitre II.

(1) N. Rostoker,M.N. Rosenbluth,Phy. Fluids,3,1 (1960).
N. Rostoker,Phy. Fluids 7,479 et 491 (1964).

(2) J.Sheffield,Scattering/theory and experiment,Academic Pres New York (1975).

(3) Voir la réf 5 du chapitre III.

(4) Voir la réf 6 du cha III.

(5) Voir la réf 2 du cha III.

(6) Voir la réf 16du cha V.

(7) voir la réf 5 du cha I.

(8) G. Bekefi, Radiation Processes in Plasmas Wiley (1966).

CHAPITRE III

Pages

ETUDE THEORIQUE DU FACTEUR DE FORME ASSOCIE AUX ONDES CYCLOTRONIQUES IONIQUES. 46

1) Sensibilité des extrémas $(\omega_{ns}^{*}),(KP)_{ns}^{*}$ au rapport Te/Ti. 48

2) Etude du facteur de forme $S(\omega,k)$. 55

. Maximalité de S aux points de vitesse de groupe nulle. 56

. Quelques caractéristiques générales de $S(\omega,k)$. 58

3) Intégration numérique du facteur de forme dans l'espace des nombres d'onde. 64

. Facteur de forme géométrique. 64

. Quasi-modes. 69

. Intégration numérique. 69

. Corrections à apporter pour prédire le décalage en fréquence. 72

- Corrections différentielles de dispersion complète. 72
- Corrections de courbure. 73

4) Influence de quelques effets simples sur le spectre de fluctuations. 73

. Influence de l'amortissement. 73

. Rôle de la géométrie. 77

- Effet de la résolution angulaire. 77
- Erreur de visée. 77

Pages

Conclusion de ce chapitre. 81

Références. 82

Annexe 1 : Calcul de sommes particulières contenant des fonctions de Bessel modifiées de première espèce. 83

Annexe 2 : Présentation du programme numérique. 85

Annexe 3 : Prédiction de la position des extrémas après intégration numérique. 89

Annexe 4 : Corrections d'erreurs de visée. 97

ETUDE THEORIQUE du facteur de forme associé aux fluctuations cyclotroniques ioniques.

1. Sensibilité des extrêmas $(\Omega ns^*, (k_{ns}\rho_s)^*)$ au rapport $\frac{Te}{Ti}$.

La relation de dispersion de base a été obtenue au chapitre I, elle s'écrit :

$$\varepsilon(k_\perp,\omega) = 1 + \frac{kde^2}{k_\perp^2} - \sum_{s=1}^{i} \frac{kds^2}{k_\perp^2} e^{-\Lambda s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n\Omega s \; In(\Lambda s)}{\omega - n\Omega s}$$

Il s'agit à présent d'étudier les extrêmas de chaque bande passante que nous noterons $(\Omega ns^*, (k_{ns}\rho_s)^*)$.

On a vu en I. B. que ces extrêmas se situaient dans la partie centrale des courbes et qu'il est donc difficile de trouver une forme analytique simple les décrivant. Ces extrêmas sont solution du système :

$$(I) \begin{cases} \text{Ree } \varepsilon(k_\perp,\omega) = 0 \\ \\ \dfrac{d\omega}{dk_\perp} = Vg = 0 \end{cases}$$

dans le cas où $\frac{d \text{ Ree } \varepsilon}{d\omega}$ n'est pas singulier, pour $\omega \neq n\Omega s$, ce système est équivalent à :

$$(I)' \begin{cases} \text{Ree } \varepsilon(k_\perp,\omega) = 0 \\ \\ \dfrac{d \text{ Ree } \varepsilon(k_\perp,\omega)}{dk_\perp} = 0 \end{cases}$$

Remarque : I. Bernstein a montré (8b) que $n\Omega s$ n'est d'ailleurs jamais solution de cette équation de dispersion (pour $k \neq o$).

Signalons à ce stade qu'aucune des relations approchées utilisées dans la littérature ne peut être employée ici pour décrire avec précision les extrêmas(par ex (1),(2),(3)).

Kindel et Kennel(3) introduisent cependant une formule qui peut se révéler utile dans les problèmes de magnéto-plasma et qui nous conduit à calculer : $X_k = \sum_{n \neq k} \frac{J_n(\Lambda_s)}{n-k}$,ce qui peut s'effectuer par récurrence (voir un calcul explicite à l'annexe 1).

La manière approchée la plus simple pour résoudre le système (I)' consiste à effectuer un developpement en série de la fréquence en fonction du paramètre:

$\Lambda_s = (k_\perp \rho_s)^2/2$, soit: $\omega = n\Omega_s \left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} a_p (\Lambda_s)^p\right)$

et de tronquer ce developpement à l'ordre de précision souhaité.

"L'expérience" de ce genre de calcul montre que les deux premiers coefficients a_1, a_2 et la prise en compte des harmoniques les plus voisines de l'harmonique considérée, ainsi que le développement autour de $\Lambda_s = 0$ de la fonction de Bessel $J_n(\Lambda_s)$ permet d'obtenir un ordre de grandeur relativement bon pour la fréquence Ω^*_{ns} ,mais le résultat est moins bon pour la valeur Λ^*_{ns} correspondante.Mais ceci est dû au fait qu'une erreur sur Λ^*_{ns} même assez importante n'a pas trop de conséquences sur Ω^*_{ns} à cause de la variation douce de ω autour du maximum sur la courbe de dispersion.

Le système d'équation s'écrit, en clair, pour une seule espèce ionique présente :

$$(II)\qquad \begin{aligned} \frac{Ti}{Te} &= -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{n-\omega}\, \Gamma s(\Lambda i)\left(-\Lambda i\left(\frac{\omega pi}{\Omega i}\right)^{-2}\right) \\ 0 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{n-\omega}\, \Gamma' n(\Lambda i)\left(-\left(\frac{\omega pi}{\Omega i}\right)^{-2}\right) \end{aligned}$$

ω est normalisée à Ωi, $\Gamma n(\Lambda i) = In(\Lambda i)\, e^{-\Lambda i}$, le signe ' désigne la dérivation par rapport à Λi.

On a effectué cette étude spécialement sur l'harmonique 1 (d'un plasma de Deutérium pur) pour laquelle la sensibilité du maximum est la plus grande (la largeur du pic est la plus faible), ce qui justifie l'attention toute particulière à porter à celle-ci. (le developpement est valable pour Te/Ti allant de 1 à 5)

Le résultat est porté sur la figure 1 pour $\Omega ns^*(\frac{Te}{Ti})$, les valeurs de $(k_{\perp} ps)^*$ sont résumées dans le tableau ci-dessous :

$(k_{\perp} ps)^*_{1D}$	$\frac{Te}{Ti}$	Ωi^*_D
Diverge	0	1.
1.42	1	1.13
0.707	2	1.25
0.470	3	1.32
0.350	4	1.38

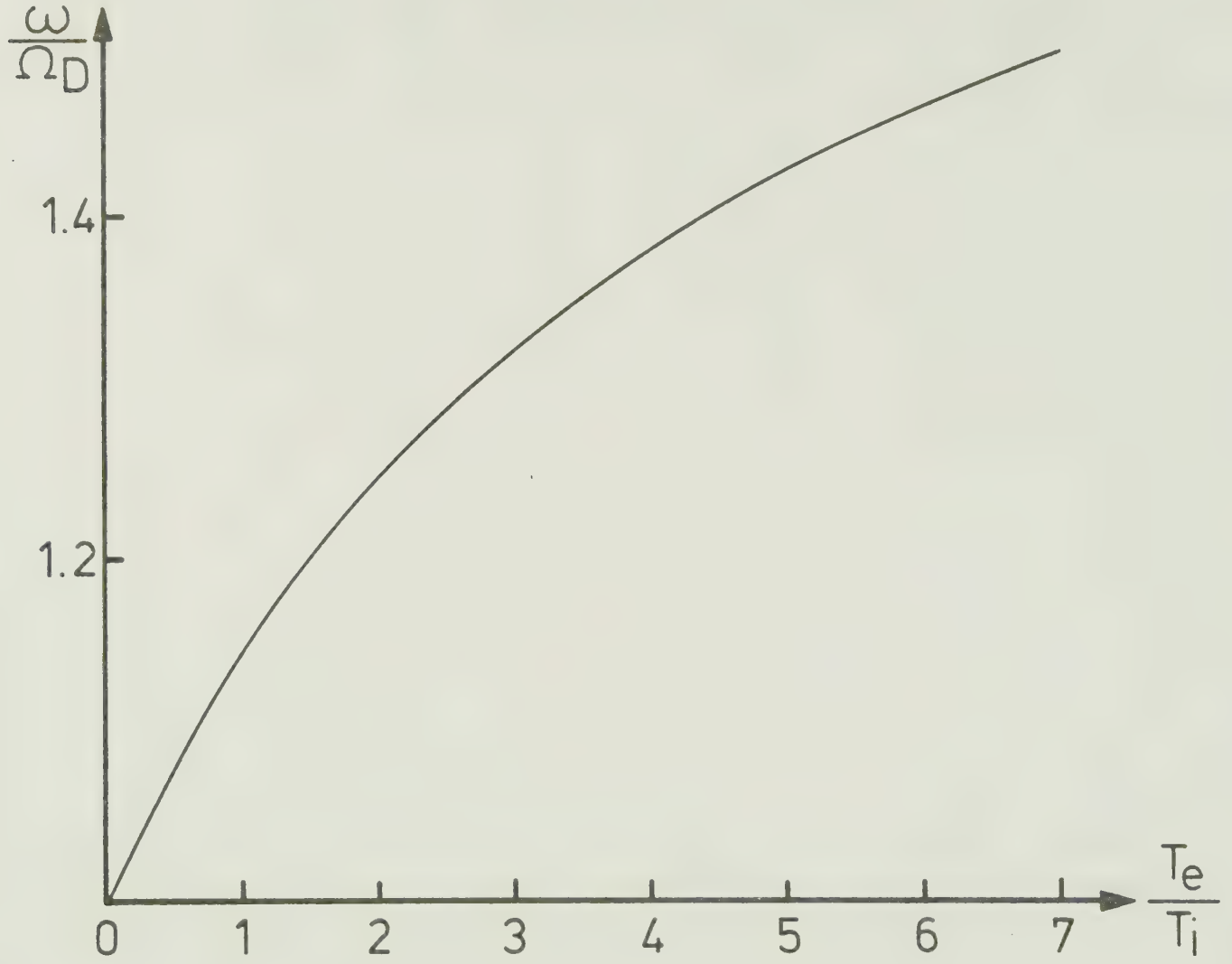


Figure 1 : Sensibilité du point de vitesse de groupe nulle avec le rapport Te/Ti pour l'harmonique 1 d'un plasma de Deutérium obtenue avec une méthode analytique approchée, $\frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i^2} = 1000$.

Ces valeurs sont finalement pas très éloignées de celles que fournissent une étude numérique et ont donc le mérite de donner l'ordre de grandeur $k\,\rho_i \underline{v} 1$, pour la gamme des rapports Te/Ti estimés dans les Tokamaks, ce qui est très important pour connaître les longueurs d'onde à atteindre dans une expérience réelle. La table qui suit indique les valeurs précises de la fréquence et des nombres d'onde des extrémas.

$\frac{Te}{Ti}$	$(k_\perp \rho)^*_{10}$ /2	Ω^*_{10}
1	0.770	1.168
2	0.653	1.270
3	0.620	1.346
4	0.590	1.405
5	0.543	1.420

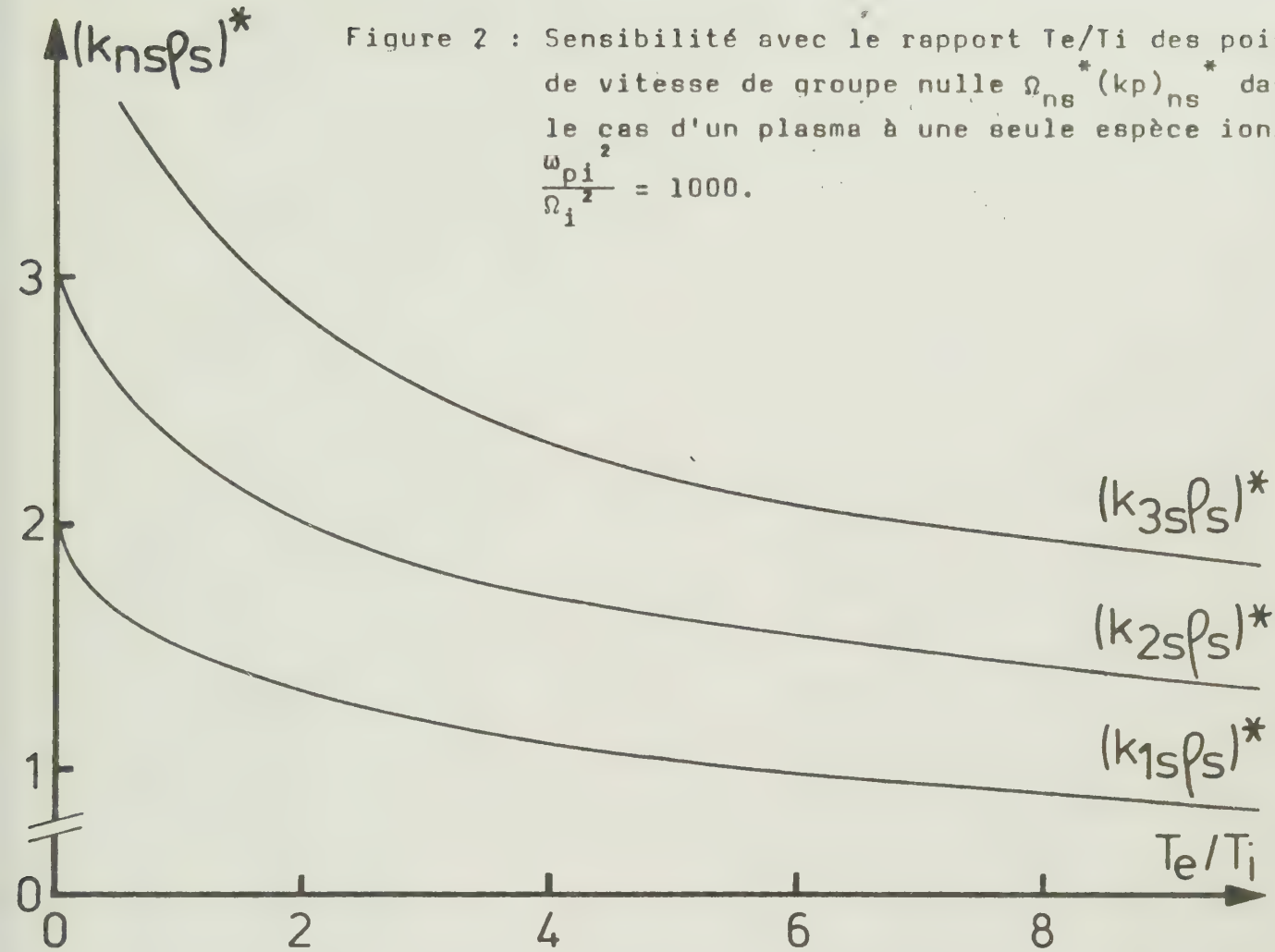
La série de courbes de la figure 2 montrent la dépendance en Te/Ti de $(k_\perp \rho_i)$ et de Ω^*_{ni} dans le cas d'un plasma de Deutérium pur, pour les trois premières harmoniques.

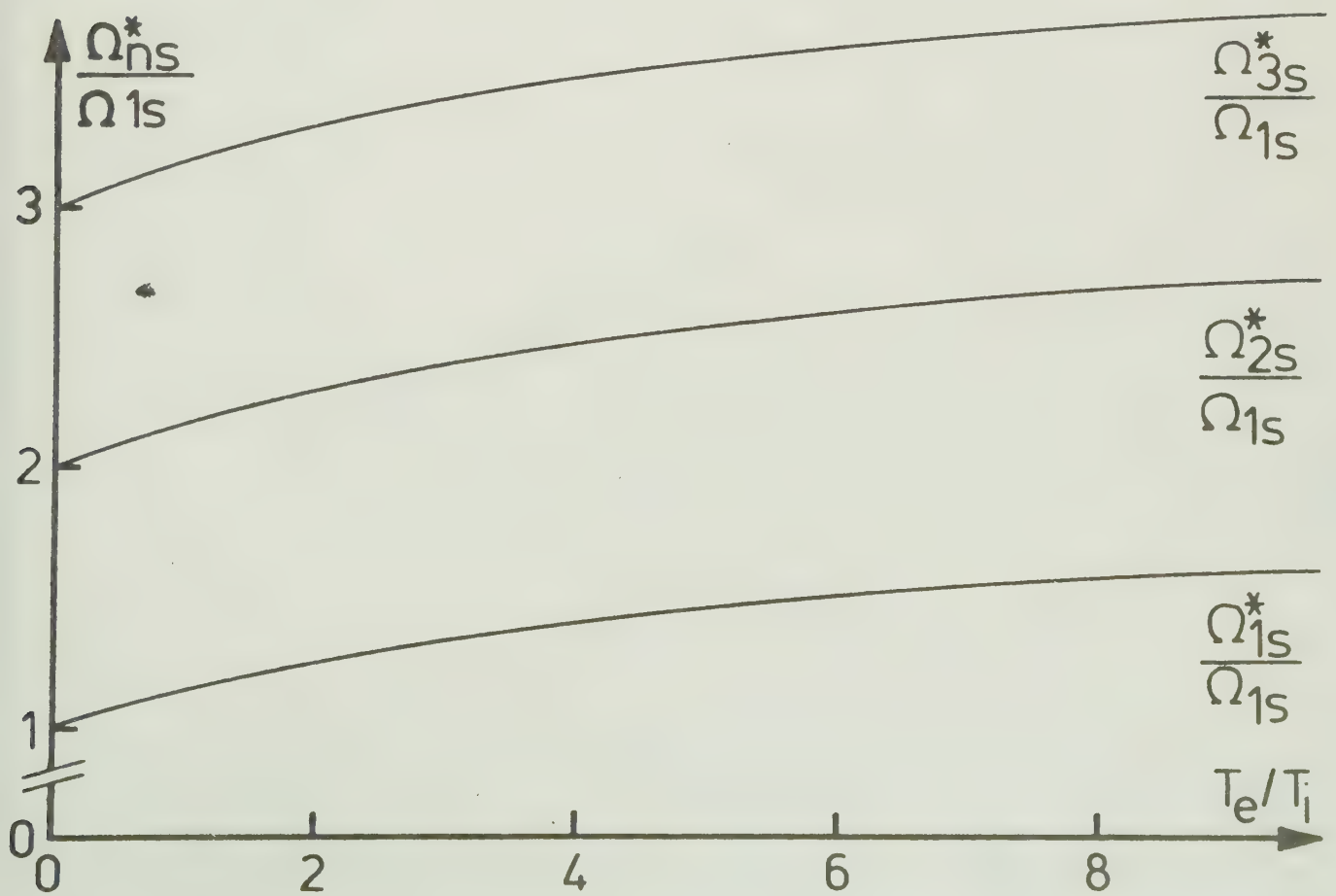
Lorsque les proportions sont arbitraires pour les espèces ioniques il faut à nouveau résoudre numériquement le système (II) qui se réécrit:

$$(III)\begin{cases} \dfrac{Ti}{Te} \simeq -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{n}{n-\omega}\left[\dfrac{nio}{ne}\,\Gamma n(\Lambda io)\right] + \sum_{s\neq io} ns\,\dfrac{Zs^2}{ne} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Gamma n(\Lambda s)\,\dfrac{n}{n-\omega} \\ 0 = \sum_{n=\infty}^{+\infty} \dfrac{n}{n-\omega}\,\dfrac{nio}{ne}\,\Gamma' n(\Lambda io) + \sum_{s\neq io} \dfrac{ns Zs^2}{ne} \sum_{n} \dfrac{n}{n-\omega}\,\Gamma' n(\Lambda s)\,\dfrac{d\Lambda s}{d\Lambda io} \end{cases}$$

La figure 3 produit le cas d'un mélange en proportions variables de Deutérium et d'Hydrogène pour la première harmonique. Ceci nous conduit donc au traitement des mélanges, nous verrons en détail ultérieurement le cas des impuretés dans un chapitre prochain.

Figure 2 : Sensibilité avec le rapport Te/Ti des points de vitesse de groupe nulle $\Omega_{ns}^{*}(kp)_{ns}^{*}$ dans le cas d'un plasma à une seule espèce ionique $\frac{\omega_{pi}^{2}}{\Omega_{i}^{2}} = 1000.$





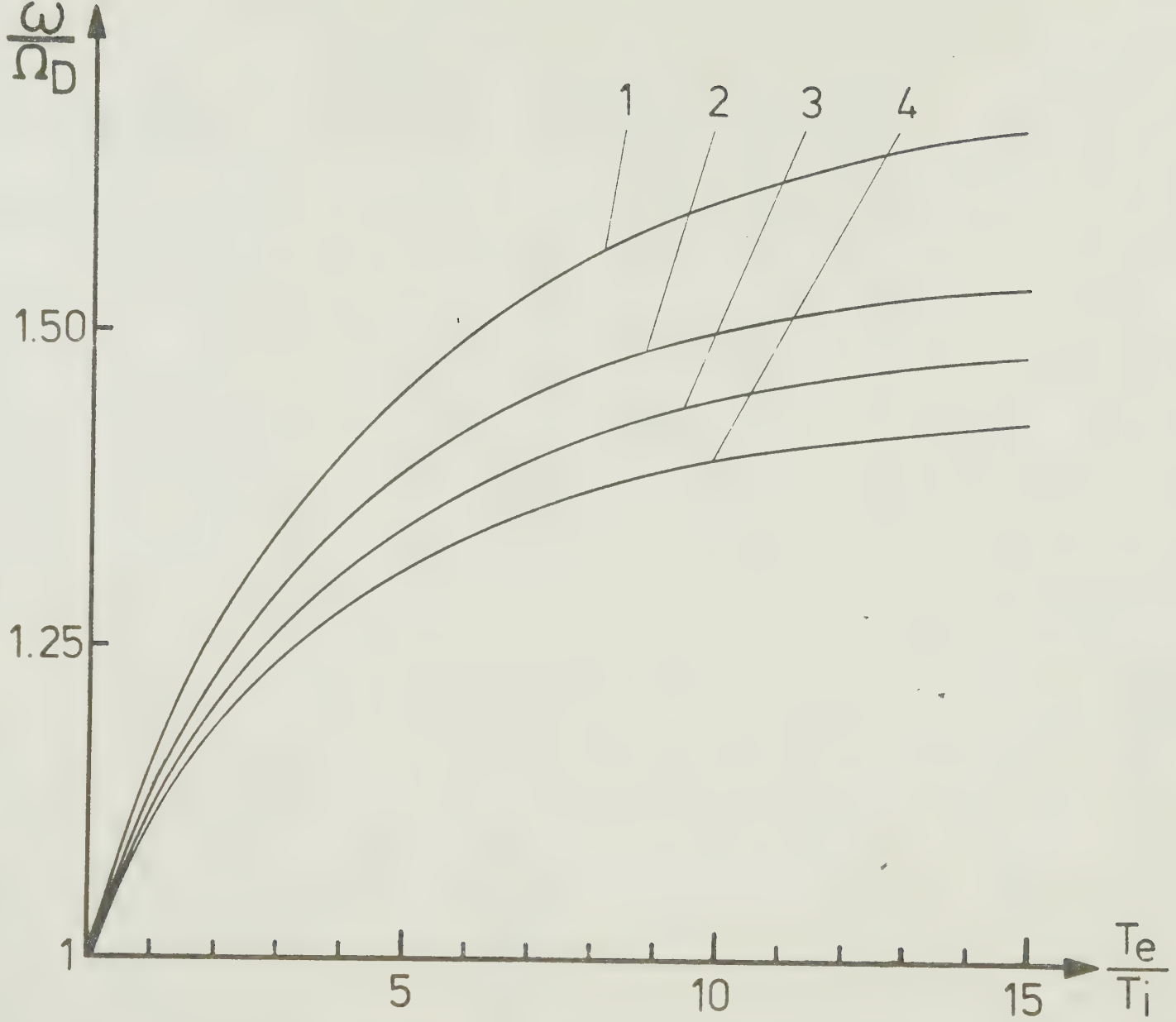


Figure 3 : Mêmes conditions qu'en 1, mais D+H respectivement 0 %, 10 %, 20 % et 30 % de H pour les courbes 1, 2, 3. 4.

2. Etude du facteur de forme $S(k,\omega)$.

Le calcul qui suit a fait l'objet d'une publication avec J. Schmitt (4) et nous reprenons ici les notations alors utilisées

On peut réecrire le facteur $S(k,\omega)$ sous la forme:

le lien avec les formules précédentes se fait par:

$D = k_{de}^2/k^2 \quad \varepsilon$

$$S(k_\perp, k_\parallel, \omega) = 2\left\{ \left|1 - \frac{H_e}{D}\right|^2 h_e + \left|\frac{H_e}{D}\right|^2 h_i \right\} \qquad (4)$$

avec $$D(k_\perp, k_\parallel, \omega) = \frac{1}{2} k^2 \rho_{i0}^2 \left(\frac{\Omega_{i0}}{\omega_{pi}}\right)^2 + H_e + H_i \qquad (5)$$

$$H_i = Z_{eff} + \sum_s \frac{n_s Z_s^2}{n_e} \frac{\omega}{k_\parallel v_s} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n(\lambda_s) e^{-\lambda_s} Z_n(\zeta_{ns}) + i\omega_i \operatorname{sgn}(k_\parallel) \right\} \qquad (6)$$

$$H_e = \frac{T_i}{T_e} \left\{ -\frac{Z'_2}{2}(\zeta'_{0e}) + i(\omega - k_\parallel v_{de}) h_e \operatorname{sgn}(k_\parallel) \right\} \qquad (7)$$

où sgn(f) désigne le signe de l'argument f.

$$hi = \pi^{1/2} \sum_s \frac{nsZs^2}{ne} \frac{1}{|k_{//}|vs} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} In(\Lambda s)\, e^{-\Lambda s}\, e^{-zns^2} \qquad (8)$$

$$he = \pi^{1/2} \frac{e^{-z'oe^2}}{|k_{//}|Ve} \qquad (9)$$

Z_r est la fonction de dispersion.

$Z'r$ sa dérivée (parties réelles),

avec $zns = \frac{\omega - n\Omega s}{k_{//} vs}$

$$Z'oe = \frac{\omega - k_{//} Vde}{k_{//} ve}$$

$$Zeff = \frac{\sum_{s=1}^{i} ns\, Z_s^2}{\sum_{s=1}^{i} ns\, Zs} \qquad \omega p_i^2 = \frac{neZi_o^2}{\epsilon o m_{io}} \qquad \Omega s = \frac{|e| Z_s Bo}{ms}$$

Maximalité de S aux points de vitesse de groupe nulle.

On va prouver ici le point qui était intuitif ; à savoir que Se est piquée autour des points de vitesse de groupe nulle étudiés précédemment. Remarquons que ceci n'est pas tout à fait immédiat, puisque si de manière générale : la relation de dispersion est vérifiée Dr = 0, il est évident que Se sera maximum si Di est minimum mais ce n'est pas à priori le point de vitesse de groupe nulle du mode considéré qui vérifiera le mieux ces conditions (mais un mode "virtuel", à priori).

$$\text{Si } D_r = 0 \qquad Se \simeq 2 \left[\frac{|He|^2 (he + hi)}{|Di|^2}\right] \text{ [pour } |He| \gg |Di| \text{]} \qquad (10)$$

pour les modes cyclotroniques ionique (s=i) : $\frac{\omega - n\Omega s}{vs} \gg k_{//} \gg \frac{\omega}{ve}$

la relation de dispersion approchée se réécrit :

$$Dr(\omega, k_\perp) = \sum_s \frac{nsZs^2}{ne} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Zn^2 \Omega s^2}{n^2 \Omega s^2 - \omega^2} \Gamma n(\Lambda s) + \frac{Ti}{Te} = 0 \qquad (11)$$

la partie imaginaire dépend elle de $k_{//}$:

dans la bande passante au-dessus de la $n^{ième}$ harmonique, on peut écrire la relation approchée :

$$Di(\omega,k_{//},k_I) = \pi^{\frac{1}{2}} \left[\frac{nsZs^2}{ne} \frac{\omega}{k_{//}vs} \Gamma n(\Lambda s) x\, e^{-(Xns)^2} + \frac{Ti}{Te}\left(\frac{\omega - k_{//} Vde}{k_{//} ve}\right)\right] \quad (12)$$

où $X_{ns} = (\omega - n\Omega s)/k_{//}v_s$

Cette relation est valable pour $\frac{Te}{Ti} \lesssim 5$ car alors $\left|\frac{\Omega ns^* - x\Omega s}{n\Omega s}\right| \leq \frac{1}{2}$ et il n'y a pas lieu de tenir compte de l'amortissement cyclotronique de l'harmonique supérieure, on cherche à minimiser Di en fonction de $k_{//}$.

$\frac{\partial\, Di}{\partial(\frac{1}{k_{//}})} = 0$ donne $k_{//} = k_{//}^*$ solution de :

$$\frac{\omega}{ve}\left[\frac{Ti}{Te} + \frac{nsZs^2}{ne}\frac{ve}{vs}\Gamma n(\Lambda s)\, e^{-(Xns)^2}\,(1-2(Xns)^2)\right] = 0$$

$$X = Xns^2 - \frac{1}{2} \qquad A = \frac{2\Gamma n(\Lambda s)\,\frac{n_s Z_s^2}{ne}}{\frac{Vs}{Ve}\frac{Ti}{Te}\sqrt{e}}$$

X est solution de $e^X = AX$

$X = \text{Log}(A \cdot (\log A))$ par itération

La première valeur approchée est $X = \text{Log } A$

soit $Xns^2 = \text{Log}\left(\frac{2\Gamma n(\Lambda s)\,\frac{n_s Z_s^2}{ne}}{\frac{Vs}{Ve}\frac{Ti}{Te}}\right)$ (13)

alors $Di\ \min\ (\omega, k_{//}^*, k_\perp) = \sqrt{\pi}\left[\frac{\omega}{\omega - n\Omega s} Xns \frac{Ti}{Te}\left(1 + \frac{1}{2Xns^2 - 1}\right) - \frac{Ti}{Te}\frac{Vde}{ve}\right]$ (14)

ainsi pour Vde donnée, Di est minimum comme fonction de ω pour $\frac{\omega}{\omega - n\Omega s}$ minimum donc exactement pour $\omega = \Omega ns^*$.

$$S_{max}(k_{//}^{*}, k_{\perp}, \omega) = \frac{2}{|Di\ min|^2} |He|^2 (he+hi) \qquad (15)$$

$$\text{avec } D\ min = \left((\omega - k_{//}^{*} Vde)\ he \frac{Ti}{Te} + \omega\ hi \right) Sgn(k_{//}) \qquad (16)$$

$$\text{pour } Vde = 0 \quad S\ max = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{ve}{vs} \frac{1}{4X_{ns}^{5}} (2Xns^2-1)^2 \left(1+\frac{Ti}{Te}\frac{1}{2Xns^2-1}\right)\left(\frac{\omega-n\Omega s}{\omega}\right)^2 \qquad (17)$$

Ce résultat est valable pour toute fréquence dans la bande passante.

Xns est une fonction lentement variable de $k_{\perp}$ (par Λs) qui est dominée par $(\frac{1}{2} Log \frac{ms}{me})^{\frac{1}{2}}$ pour $k_{\perp}\rho \simeq 1$, dans le cas du Deutérium Xns ≃ 2.

S est bien maximale pour $\Lambda_{ns} = \Lambda_{ns}^{*}$ et $\omega = \Omega ns^{*}$.

La figure 3b donne l'allure de $S^{*}(\omega = \Omega io^{*}, k_{\perp}^{*}, k_{//}^{*})$ en fonction de $\frac{Te}{Ti}$ pour une seule espèce ionique. On peut prédire une croissance de S^{*} comme $\frac{Te}{Ti}$ dûe à la décroissance de l'amortissement et à l'élargissement des bandes passantes.

-Quelques caractéristiques générales de S(k,ω).

On va se limiter à un spectre thermique dans un magnéto-plasma infini, dans le domaine ionique pour une propagation dans une direc-tion proche d'une perpendiculaire au champ magnétique.

Nous faisons ainsi des rappels succints permettant de visualiser S(k,ω).

Il faut rappeler ici l'apparition des gyrorésonnances avec l'établis-sement du champ magnétique. Si l'on s'intéresse au spectre à basse fréquence ce sont les caractéristiques des ions qui vont dominer celui-ci.

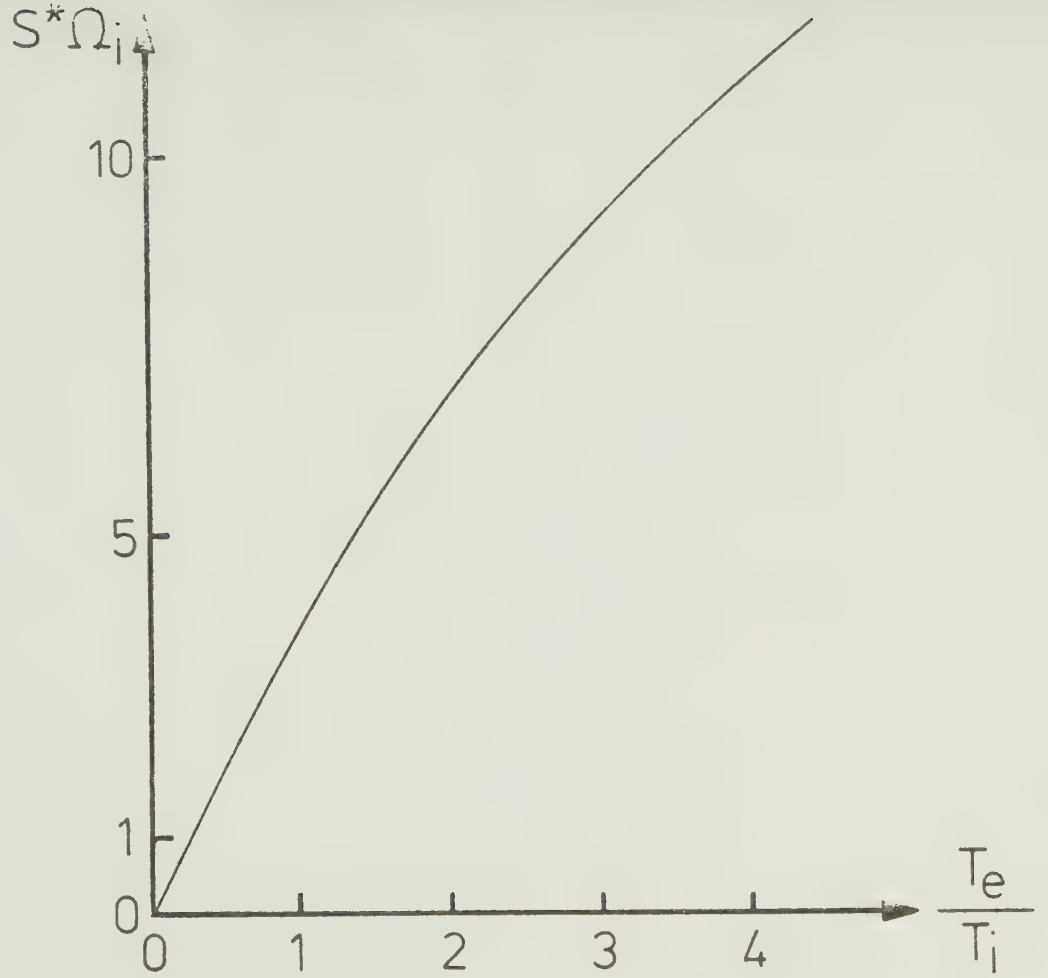


Figure 3b : Densité spectrale au maximum du spectre pour l'harmonique 1 d'un plasma à une seule espèce ionique, en fonction de Te/Ti, Vde = 0.

On peut résumer les caractéristiques du spectre suivant les valeurs des différents paramètres (5).

-Cas $\alpha \leq 1$

si $\Omega_{c_i} \ll k V_i$, $\cos\theta_B \gg \frac{\Omega_{c_i}}{k V_{i,e}}$ il y a peu d'effet de B sur le spectre.

si $\Omega_{c_i} \gg k V_i$ on assiste à une réduction de la largeur du spectre proportionnellement à $\cos\theta_B$.

si $\Omega_{c_i} \ll k V_i$ mais $\cos\theta_B \ll \frac{\Omega_{c_i}}{k V_{i,e}}$ il existera une série de pics cyclotronique ionique et (ou) une série de pics électronique(les pics sont alors centrés sur $m\Omega_{i,e}$).

-Cas $\alpha \gg 1$

La série de pics ioniques est tojours séparée par des fréquences égales à Ω_{c_i} mais cette fois les pics sont sensiblement centrés sur des valeurs $(n+\epsilon_n)\Omega_{c_i}$. La figure 4b (5) montre ce déplacement de la fréquence des "résonances" (solutions de la dispersion) avec le paramètre $\frac{\omega}{k V_i}$.

si $\Omega_{c_i} \ll k V_i$ mais $\Omega_{c_e} \gg k V_i$ cette structure cyclotronique subsiste dans une plage angulaire: $\frac{V_i}{V_e} \ll \cos\theta_B \ll \frac{V_i}{V_e} \frac{\Omega_{c_e}}{\Omega_{c_i}}$

si l'angle $\theta_B = (\hat{k}, \hat{B})$ vaut 90 degrés les pics rétrécissent et si $\Omega_{c_e} < k V_i$ il n'y a plus d'amplitude notable que pour les pics tels que: $\omega < k V_i \cos\theta_B$ tout se concentre alors dans le pic sans changement de fréquence.

Sur la figure 5 on donne les courbes de niveau à fréquence fixée pour S(k,w) dans l'espace des nombres d'onde qui est ici bidimensionnel. Il s'agit du spectre pour les ondes cyclotroniques ioniques dans les conditions que l'on a précisées au début de ce paragraphe. Cette figure sera utile au paragraphe suivant. Remarquons l'asymétrie du spectre à cause d'une vitesse de dérive non-nulle ; cette allure est valable pour toute fréquence dans les bandes passantes.

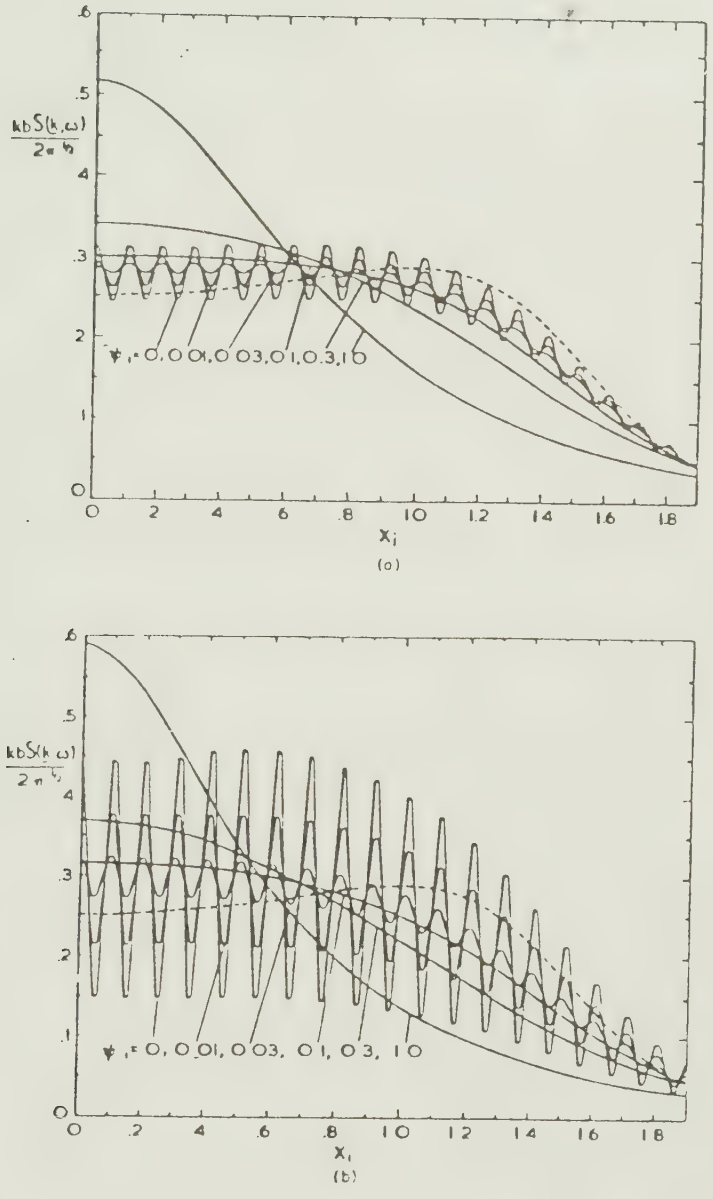


Figure 4a : Facteur de forme $S(k,\omega)$ en fonction de $\frac{\omega}{k V_{//i}}$ (réf 7)

a) Spectre pour $\theta_B = (\bar{k}, \bar{\Omega}) = 87°$

b) Spectre pour $\theta_B = 88°$

Plasma d'o^+, $\frac{Te}{Ti} = 1$, $\frac{\Omega_i}{k V_i} = 0.1$

ψ_i est une fréquence de collision ion-neutre normalisée à kV_i.

ψ_e est une fréquence de collision électronique $\psi_e = \psi_i/10$.

La courbe en pointillé est l'enveloppe en champ nul.

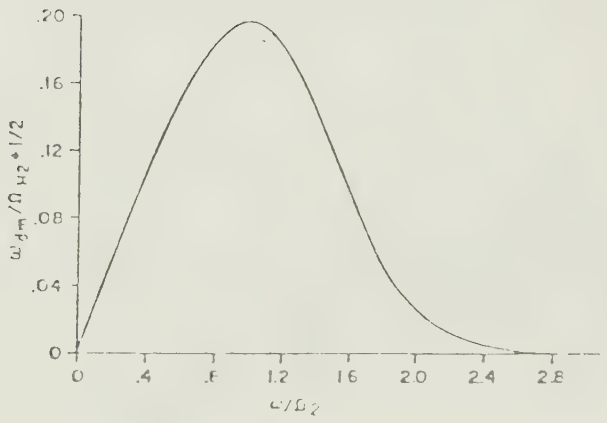


Figure 4b : Ecart en nombre d'onde des solutions de dispersion par rapport à la fréquence cyclotronique pour les grandes longueurs d'onde. (réf 5)

$$\frac{\omega}{\Omega_2} \rightarrow \frac{\omega}{kV_i}$$

$$\frac{\omega_{dm}}{\Omega_{H2}} + \ell/2 \rightarrow \frac{\omega_{\ell s}}{\Omega_s} - \ell$$

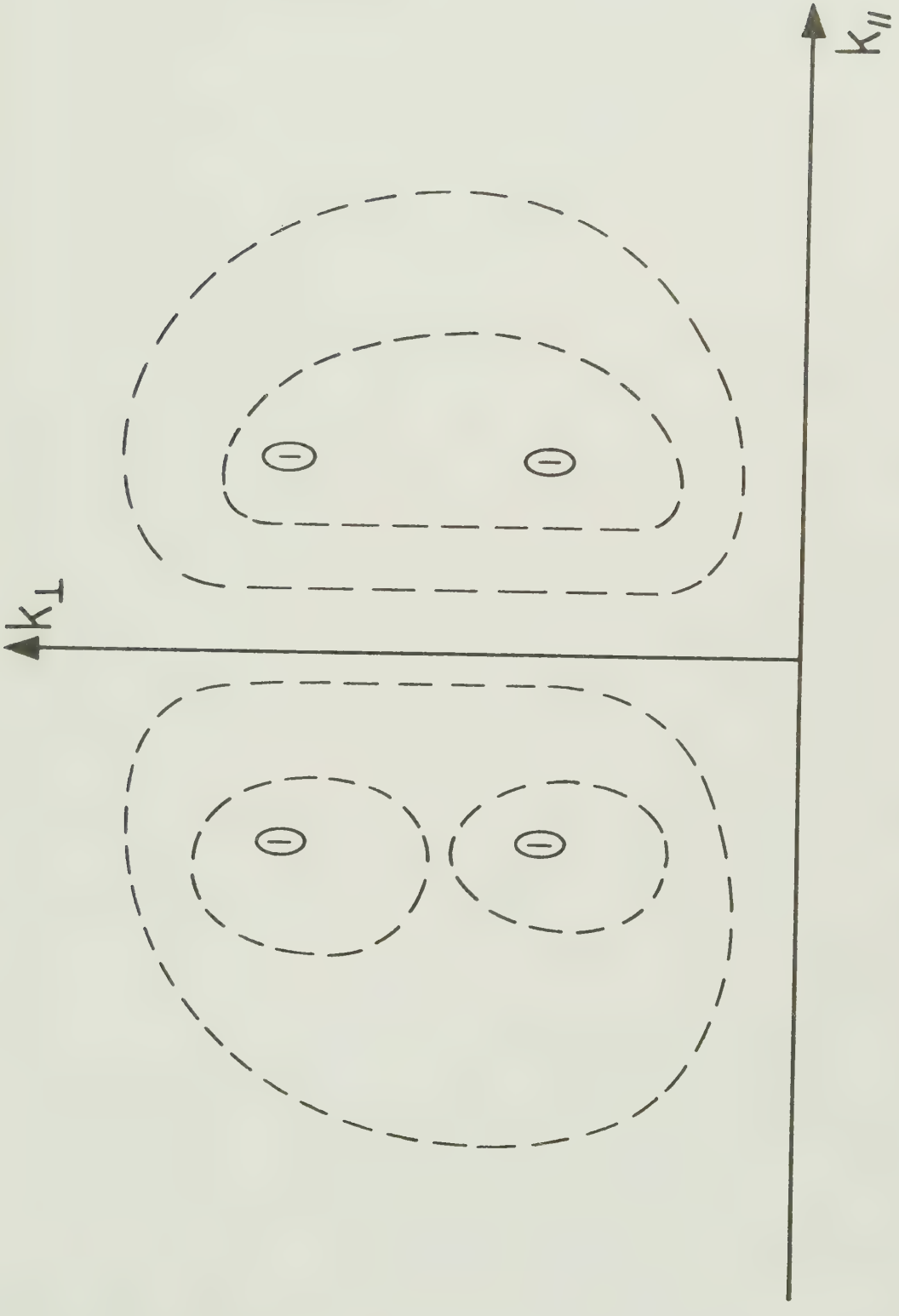


Figure 5 : Allure des courbes de niveau (ω = cte) du facteur de forme dans l'espace des nombres d'onde.

3. Intégration numérique du facteur de forme dans l'espace des nombres d'onde.

On a obtenu l'expression de $S(k,w)$ à w donné dans le plan $(k_{//}, k_{\perp})$ au paragraphe précédent. Il faut à présent mettre ce facteur sous une forme commode pour une expérience possible pour laquelle il y a obligatoirement un élargissement de définition dans l'espace des k. Rappelons, ce que nous discuterons en détail plus tard que $S(k,w)$ apparait comme le spectre diffusé par les électrons et il sera accessible dans une expérience de diffusion Thomson par exemple. Le vecteur d'onde sur lequel devra s'effectuer la diffusion sera défini avec une certaine résolution. La mesure réelle de $S(k,w)$ consistera donc à réaliser une intégration dans l'espace des k autour de la valeur k^*_{ns} définie par $(k^*_{\perp ns}, k^*_{//ns})$, il est très important de savoir si les extrêmas du spectre vont survivre à cette intégration.

Les causes d'élargissement en vecteur d'onde ont essentiellement trois origines :

- une définition en k d'une mesure, qui tient compte de la géométrie du faisceau éléctromagnétique incident (la largueur et la divergence du faisceau sont les responsables de cette résolution).
- L'ouverture du détecteur de mesure.
- Le cisaillement des lignes de champ magnétique qui tient compte d'une géométrie toroidale réaliste (cette dernière cause provoque un élargissement de définition de $k_{//}$).

Facteur de forme géométrique.

Nous introduisons un facteur de forme géométrique pour tenir compte de la résolution, ce terme ayant été d'abord considéré par E. Holzauer (8).

On montre en effet que la puissance diffusée par les électrons est proportionnelle aux termes suivants (voir Cha VI):

$$P_s(\omega) = A \int d^3k \, |W(\bar{k}_\Delta - \bar{k})|^2 \, [S(\bar{k}, \omega_\Delta + \omega) + S(\bar{k}, \omega_\Delta - \omega)] \quad (18)$$

où A est une fonction des caractéristiques du plasma et du rayonnement électromagnétique incident.

on a : $\begin{cases} \omega_\Delta = \omega_s - \omega_i \\ k_\Delta = k_s - k_i \end{cases}$

les termes indicés par s se réfèrent à la direction d'observation, ceux indicés par i à la direction incidente.

Ici on a $|\omega_\Delta| \ll \omega_i$: on ne cosidère alors qu'un terme de la forme:

$$\int d^3k \, |W(\bar{k}_\Delta - \bar{k})|^2 \, [S(\bar{k}, \omega)]$$

Dans le cas de faisceaux laser gaussiens, le facteur de forme géométrique se traduit par des exponentielles de pondération. (fig 6)

En se limitant à des fréquences ω positives ce qui sera justifié plus loin, on introduit finalement le facteur de forme moyénné:

$$(\Delta k)^2 < S(\omega, k_{m_s}^*, \Delta k) > = \frac{1}{n} \int S(\omega, k_\perp, k_{//}) \, e^{-\frac{[k_\perp - k_{\perp m_s}^*]^2}{(\Delta k)^2}} \, e^{-\frac{[k_{//} - k_{//m_s}^*]^2}{(\Delta k)^2}} \, dk_{//} \, dk_\perp$$

$$-\Omega_{ns} \leq \omega \leq \Omega_{ns}^* \quad (19)$$

Δk est la résolution en nombre d'onde.

Le fait que l'intégration soit bidimensionnelle et non tridimensionnelle sera justifiée au chapitre VI.

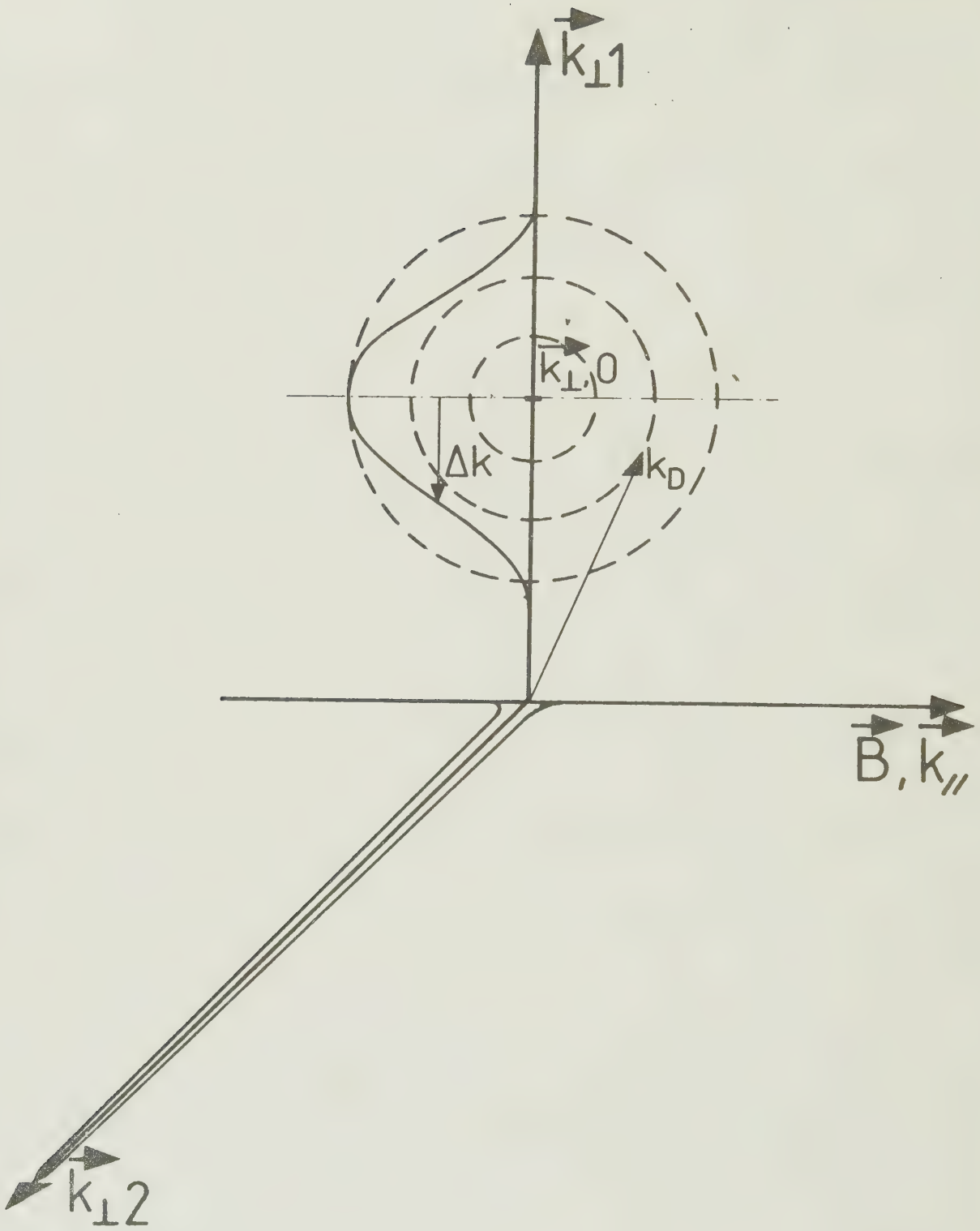


Figure 6 : Choix de la géométrie pour l'intégration numérique du facteur de forme.

La formule qui précéde est valable dans la bande passante $(\Omega_{ns}, \Omega_{ns}^{*})$ et elle peut en fait être étendue à toutes les bandes de fréquence si on l'écrit:

$$(\Delta k)^2 < S(\omega, k^{*}_{1,io,\perp}, \Delta k) > = \frac{1}{n} \int S(\omega, k_{//}, k_{\perp})\, dk_{//} dk_{\perp}\, e^{-\frac{\left[(k_{\perp} - k_{1,io,\perp})^2 + k_{//}^2\right]}{(\Delta k)^2}}$$

w quelconque.

$K_{1,io,\underline{I}}$ désignant le vecteur d'onde à l'extrêma pour la première harmonique de l'ion majoritaire repéré par io.

La justification de cette approximation réside dans le fait que dans les conditions étudiées, la composante parallèle du vecteur d'onde qui minimise l'amortissement $k^{*}_{//ns}$ est très petite devant la composante perpendiculaire définissant l'extrêma $k^{*}_{\perp ns}$, et donc la correction apportée par la variation de $k^{*}_{//ns}$ dans l'exponentielle de pondération en $k_{//}$ est tout à fait négligeable .

En ce qui concerne le terme en $k^{*}_{\perp,ns}$: le fait qu'il varie avec Te/Ti et n pourrait faire penser que l'erreur de centrage du facteur géométrique est conséquente. En fait la variation de cette composante perpendiculaire du nombre d'onde avec Te/Ti est sufisamment lente pour que la correction sur l'exponentielle :

$$e^{-(k_{\perp} - k^{*}_{1,io,\perp})^2/(\Delta k)^2}$$

soit totalement négligeable, comme le montre l'étude numérique, devant la variation très rapide de S autour de $(k_{\perp} = k^{*}_{\perp ns}, ns^{*})$,

puisque si l'amortissement tend vers zéro S a un pôle d'ordre 2 autour de $k_\perp = k_{\perp ns}^*$ (par contre la variation en n est en gros linéaire ce qui conduit à privilégier telle ou telle harmonique).

Le fait que

$$(20)\quad \begin{cases} Dr(k_{\perp ns}^*, \Omega_{ns}^*) = 0 \\ \dfrac{\partial Dr}{\partial k_\perp}(k_{\perp ns}^*, \Omega_{ns}^*) = 0 \\ Di(k_{//ns}^*, k_{\perp ns}^*) = \text{minimum} \end{cases}$$

nous a conduit à une expression approchée de $S(k,\omega)$ autour de ses extrêmas. Malheureusement comme l'expression intégrée sur k doit être valable pour toute fréquence, il devient extrèmement difficile de trouver une forme analytique correcte pour la décrire , en raisonnant par exemple en termes de largeur et en développant S autour de $k = k_{\perp ns}^*$.

De plus, l'introduction d'une largeur Δk quelconque à priori conduit à des vecteurs d'onde dont l'angle avec le champ magnétique devient arbitraire et il faut tenir compte de l'expression complète de la dispersion pour calculer correctement cette intégrale. Ceci conduit nécessairement à une grosse étude numérique.

Ce calcul complet est donc effectué numériquement pour la première fois, la seule tentative à notre connaissance dans la littérature concernant un spectre cohérent ou incohérent mais des ions non magnétisés ($\omega \gg \Omega i$) (Boyd, Evans et Gardner, (12))

Quasi-modes.

- Une étude numérique préliminaire k, ne tenant compte que de l'expression approchée de la dispersion pour $D\Omega$, correcte pour Di, fait apparaître des "canulars numériques" : si les pics des extrêmas réapparaissent bien après intégration il s'y ajoute des pics parasites "quasi-modes" au sens qu'ils ne sont pas décrits par la relation de dispersion mais dont la contribution est artificiellement accentuée par l'intégration.(On n'a pas jugé utile de les présenter ici)

Intégration numérique.

- Le calcul complet est ensuite fait, en choisissant comme domaine d'intégration un disque gaussien de rayon Δk arbitraire. voir l'annexe 2 pour ce qui concerne le programme numérique. Le résultat de ce calcul est donné à la figure 7 pour un plasma de Deutérium , Te/Ti=2 et une vitesse de dérive nulle, avec une résolution $\Delta k/k$ de 50%. La figure 8 montre l'allure du facteur de forme intégré pour la première harmonique du spectre et différents Te/Ti.

Il est intéressant de constater que les extrêmas survivent très bien à l'intégration , mais surtout que les ondes de Bernstein quasi-neutralisées dominent le spectre parmi tous les modes possibles à K_I donné, (ou non) puisque l'on a pris l'expression de la dispersion complète et $\Delta k/k$ grand.

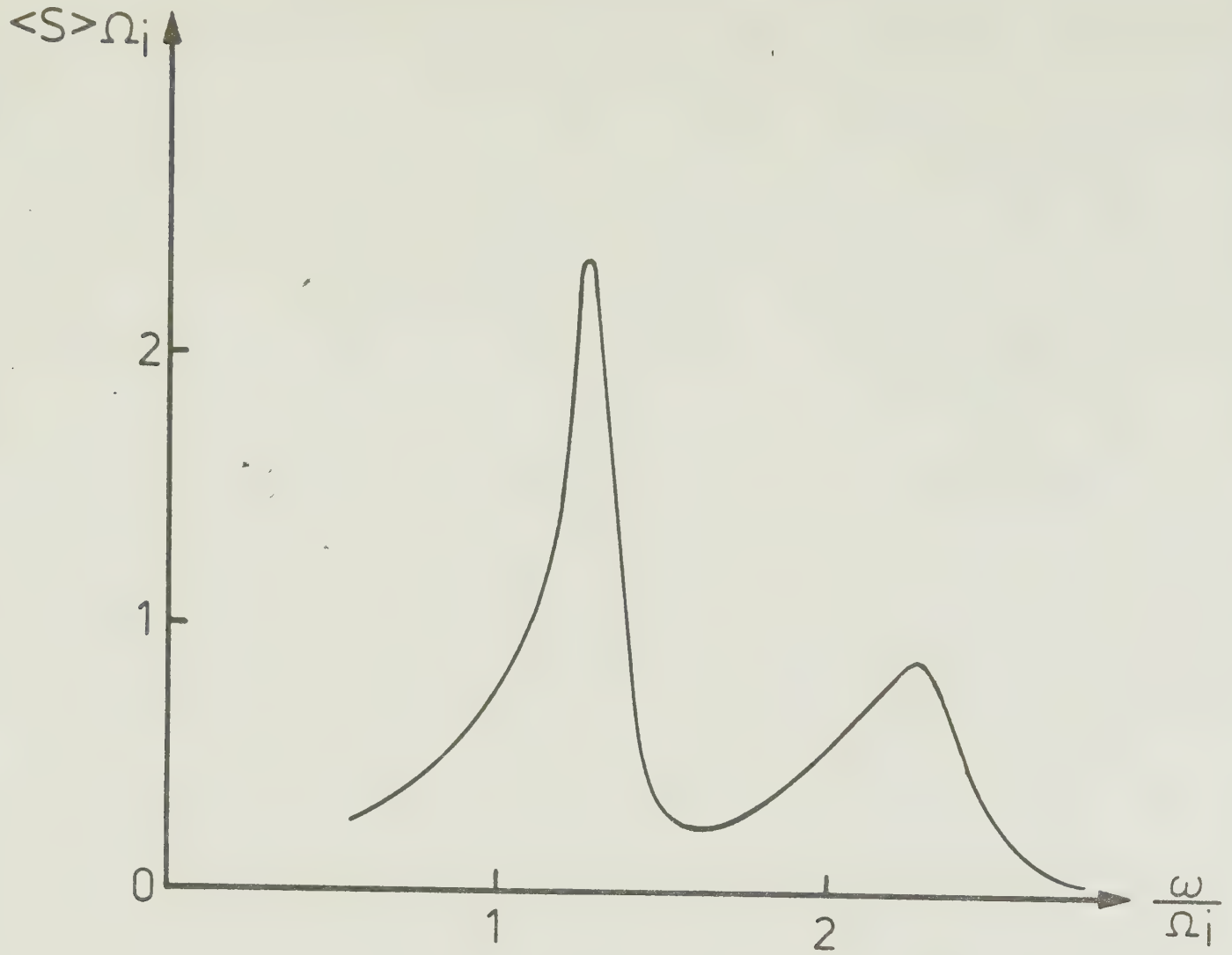


Figure 7 : Facteur de forme intégré - plasma de D pur, $\frac{Te}{Ti} = 2$, $\frac{\Delta k}{k} = 1/2$, $(kp)^{*}_{1.} = 1.3$

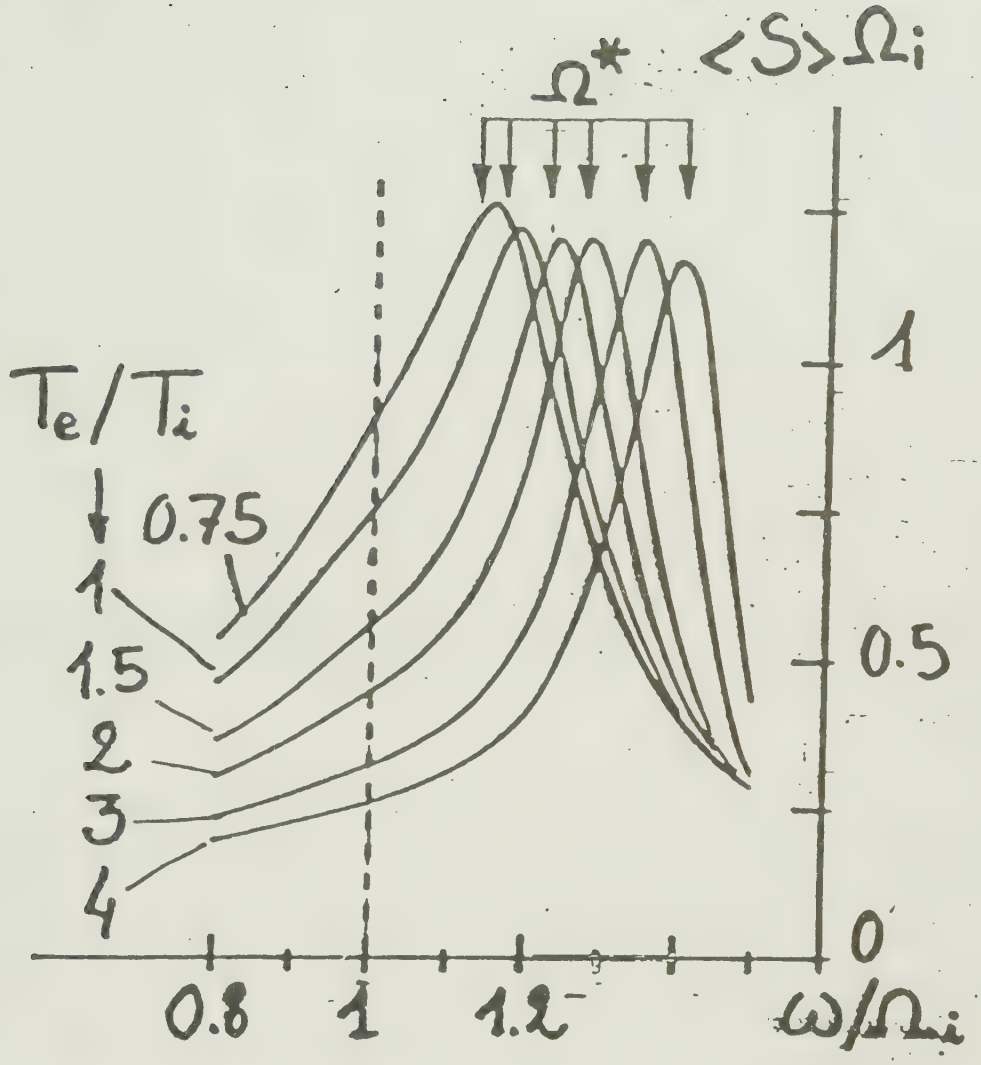


Figure 8 : Facteur de forme intégré pour Te/Ti variable (mêmes conditions qu'à la Figure 7 par ailleurs).

Les flèches indiquent les prévisions de la dispersion approchée.

La figure 8 montre que le pic principal $\Omega_1^*(\frac{Te}{Ti})$ n'est pas affecté si Te/Ti varie par le fait que l'on a choisi $(k_\perp \rho)_1^* = 1.306$ (valeur pour Te/Ti=2). Ce pic se déplace vers les hautes fréquences avec $\frac{Te}{Ti}$ et croit sensiblement comme $\frac{Te}{Ti}$. C'est la mesure de ce décalage en fréquence qui est proposée pour mesurer $\frac{Te}{Ti}$. La précision de cette prédiction reposant sur la largeur du pic. On constate cependant qu'il existe un léger décalage en fréquence par rapport aux valeurs théoriques Ω_{ns}^*. C'est une conséquence de l'amortissement cyclotronique ionique (car Di n'est pas exactement nul).

Corrections à apporter pour prédire le décalage en fréquence.

Ce décalage peut se prédire en calculant deux sortes de correction :

- Des corrections différentielles sur la relation de dispersion tenant compte de ce que l'on utilise la relation complète pour l'intégration.

- Des corrections dues aux effets de courbure dans l'intégration.

Etude des corrections différentielles de dispersion complète.

$\Delta\omega = -\frac{\Delta D_r}{\frac{\partial D_{ro}}{\partial \omega}}$, D_{ro} est la solution approchée à l'ordre zéro en $\frac{k_{//}}{k_\perp}$

La dispersion complète sous la forme utilisée pour l'étude numérique est (toutes les grandeurs sont normalisées à l'hydrogène H, les fréquences sont normalisées aux fréquences cyclotroniques et les vecteurs d'onde à l'inverse des rayons de Larmor) :

$$\cdot = \frac{k^2 \Omega_H^2}{2\omega_{pH}^2} + \sum_s \frac{z_s n_s^2}{n_e} \sum_n \Gamma_n(\Lambda_H \frac{m_s}{z_s^2}) \left(1 + \sqrt{m_s}\frac{\omega}{k_{//}} z\left(\sqrt{m_s}\,\frac{\omega - n z_s}{k_{//}}\right) + \frac{T_i}{T_e} z'\left(\sqrt{\frac{m_e T_i}{T_e}}\frac{\omega}{k_{//}}\right)\right) \quad (21)$$

Ce calcul est fait à l'annexe 3 ;on constate un déplacement systématique du spectre vers l'ultraviolet ce qui est dû au fait qu'en tenant compte de la dispersion complète on privilégie,en intégrant, ces quasi-modes dont la contribution déplace la fréquence vers les plus grandes valeurs.

Corrections dues aux effets de courbure dans l'intégration.

Cette fois le déplacement du spectre se produit vers l'infra-rouge car un examen succint de la dispersion montre que les poids des modes (k,ω) pour $k \leq k^*$ est plus élevé que celui des modes à $k \gtrsim k^*$.

Pour les détails des calculs se reporter également à l'annexe 3.

La table de la page suivante résume les différents calculs et montre que l'on peut prédire la position des extrêmas avec une bonne précision.

4. Influence de quelques effets simples.

a) Influence de l'amortissement.

On a modifié le programme de calcul pour tenir compte d'un amortissement Landau électronique variable simulé par la variation du rapport me/mi à mi constante,ce qui permet de montrer son influence sur l'amplitude d'un pic.La figure 9 illustre ce phénomène.Notons à ce propos qu'il est important de considérer l'expression exacte pour la fonction de dispersion Z pour la contribution des électrons à la dispersion et non pas seulement le premier terme du developpement de Z .Si l'on garde seulement le premier terme on obtient des micro-pics parasites aux harmoniques cyclotroniques comme le montre la figure 10.

Les ondes cyclotroniques ioniques sont d'autre part légèrement amorties par effet cyclotronique ionique et c'est cet amortissement qui

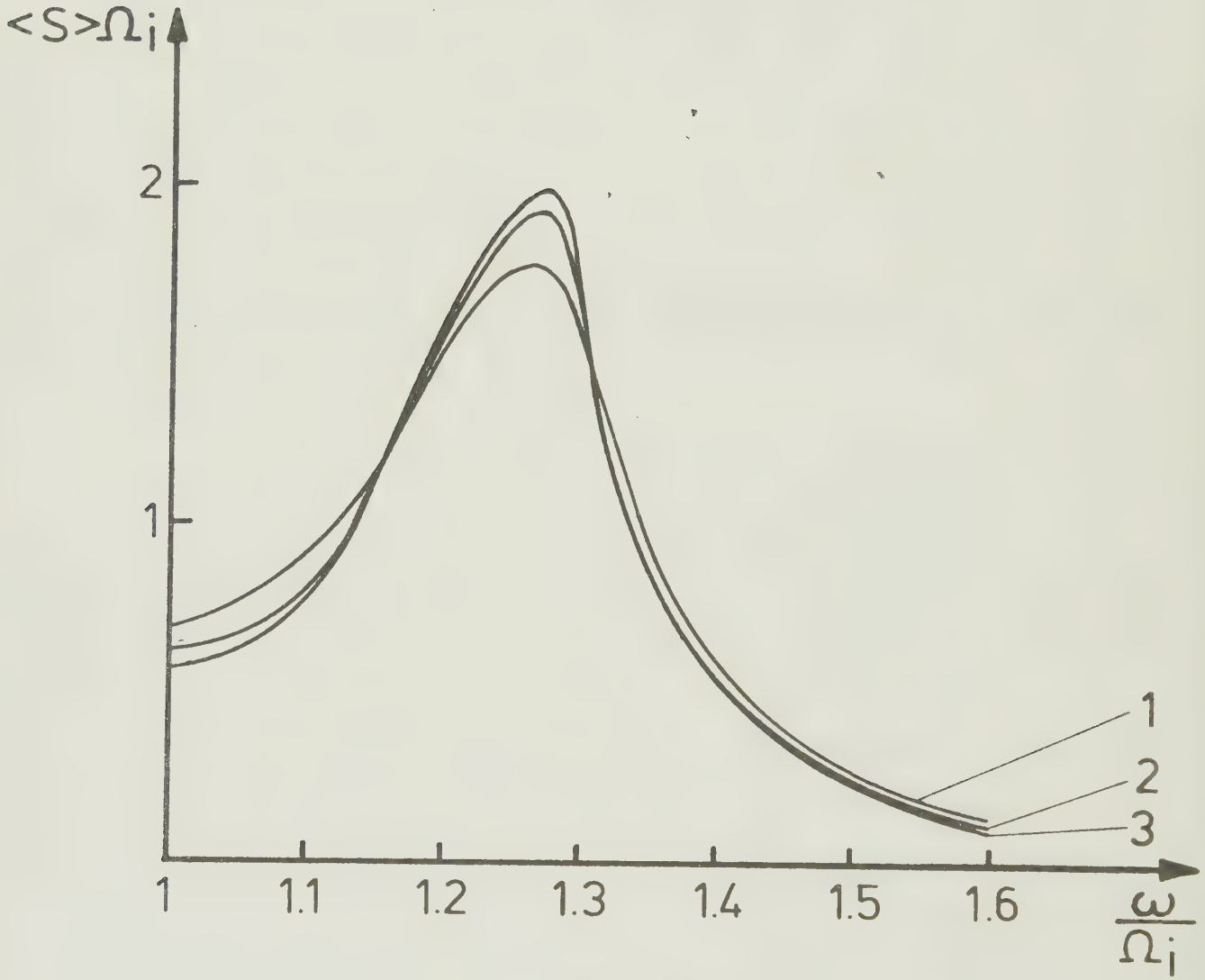


Figure 9 : Effet de l'amortissement Landau électronique sur le spectre intégré. Les courbes 1,2,3 sont obtenues pour $\frac{me}{mi} = \frac{me}{mD}, \frac{me}{2mD}, \frac{me}{3mD}$ ($\frac{Te}{Ti} = 2$).

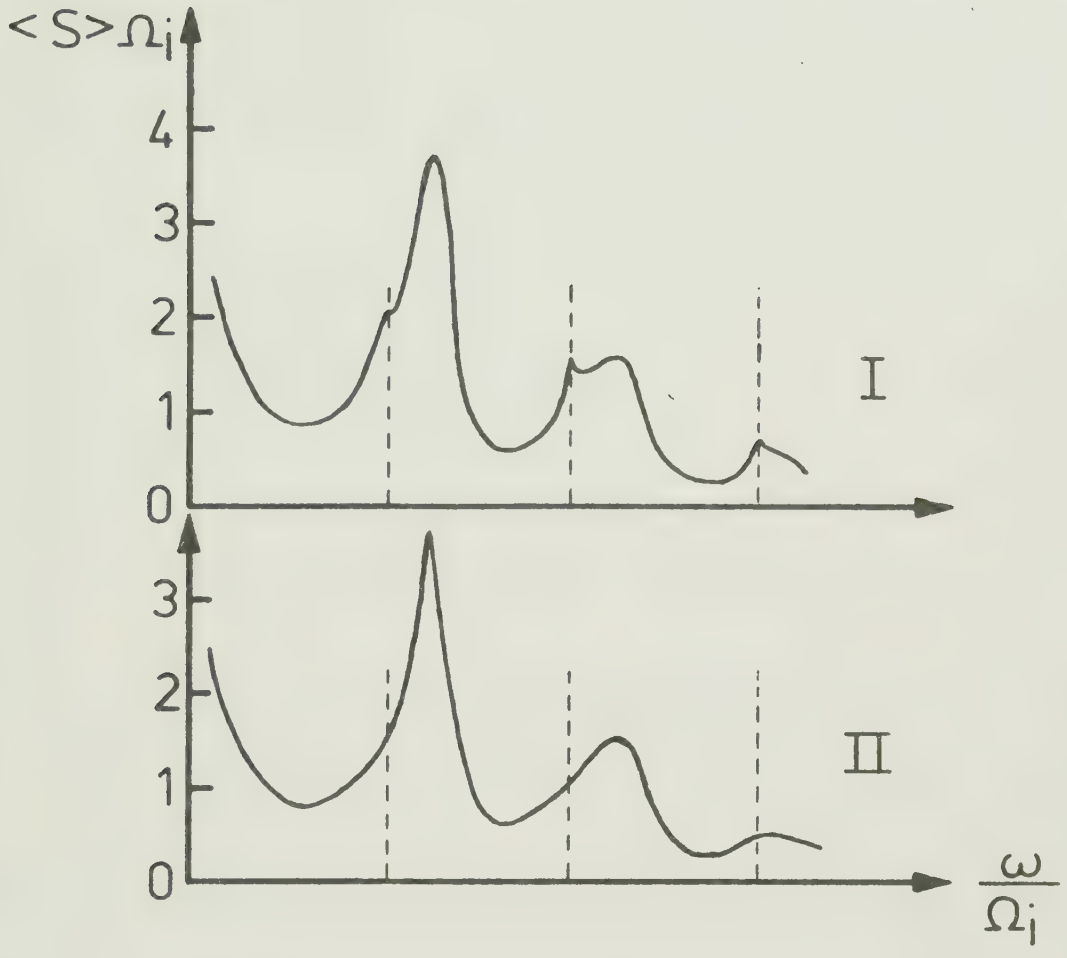


Figure 10 : Spectre de fluctuations pour un plasma de D pur. $\frac{\omega_{pi}^2}{\Omega_i^2} = 1000$, $k_\perp p = 1.3$, $\frac{\Delta k}{k} = 1/2$, $\frac{Te}{Ti} = 2$.
La courbe I est obtenue avec l'approximation d'ordre 1 pour les propriétés de la dispersion électronique, la courbe II tient compte de la dispersion électronique complète.

qui déplace les pics en fréquence lorsque l'on effectue l'intégration sur les nombres d'onde, qui est en partie responsable de la largeur non nulle des extrêmas(àΔk/k donné).
Remarque : le fait que <S> ne croisse pas exactement comme $\frac{Te}{Ti}$ est du à ces effets d'intégration.

La table ci-dessous résume les différentes prédictions pour une vitesse de dérive nulle et un plasma de Deutérium.

Ωns^{**} : valeur théorique obtenue par la relation de dispersion approchée intégrée numériquement.

Ωns^{**} : valeur théorique Ωns^{*}, corrigée des effets traités comme différentiels de modification de la dispersion.

Ωns^{***} : valeur prévue lorsque l'on rajoute à Ωns^{**} les effets d'intégration.

$\frac{Te}{Ti}$	Ωns^{*}	Ωis^{**}	Ωis^{***}	ω ordinateur
1	1.162	1.198	1.167	1.170
1.5	1.220	1.253	1.225	1.230
2	1.268	1.303	1.275	1.275
3	1.343	1.383	1.340	1.350
4	1.403	1.443	1.390	1.400

On constate que l'accord est satisfaisant.

- Rôle de la géométrie.

-effet de la résolution angulaire.

La largeur des pics est affectée par la valeur de $\frac{\Delta k}{k}$ de la résolution en vecteur d'onde (ou résolution "angulaire"). Par contre, la position de l'extremâ est inchangée. La figure 11 montre l'influence de ce facteur pour différentes résolutions allant jusqu'à $\frac{\Delta k}{k}=1$ ce qui constitue une résolution vraiment très pessimiste. La figure 12 montre d'autre part le facteur de forme intégré lorsqu'il n'y a pas de convolution avec une fonction d'appareil (profil de faisceau plat). On en conclu que "l'optique" gaussienne postulée précedemment constitue un facteur indifférent.

-erreur de visée.

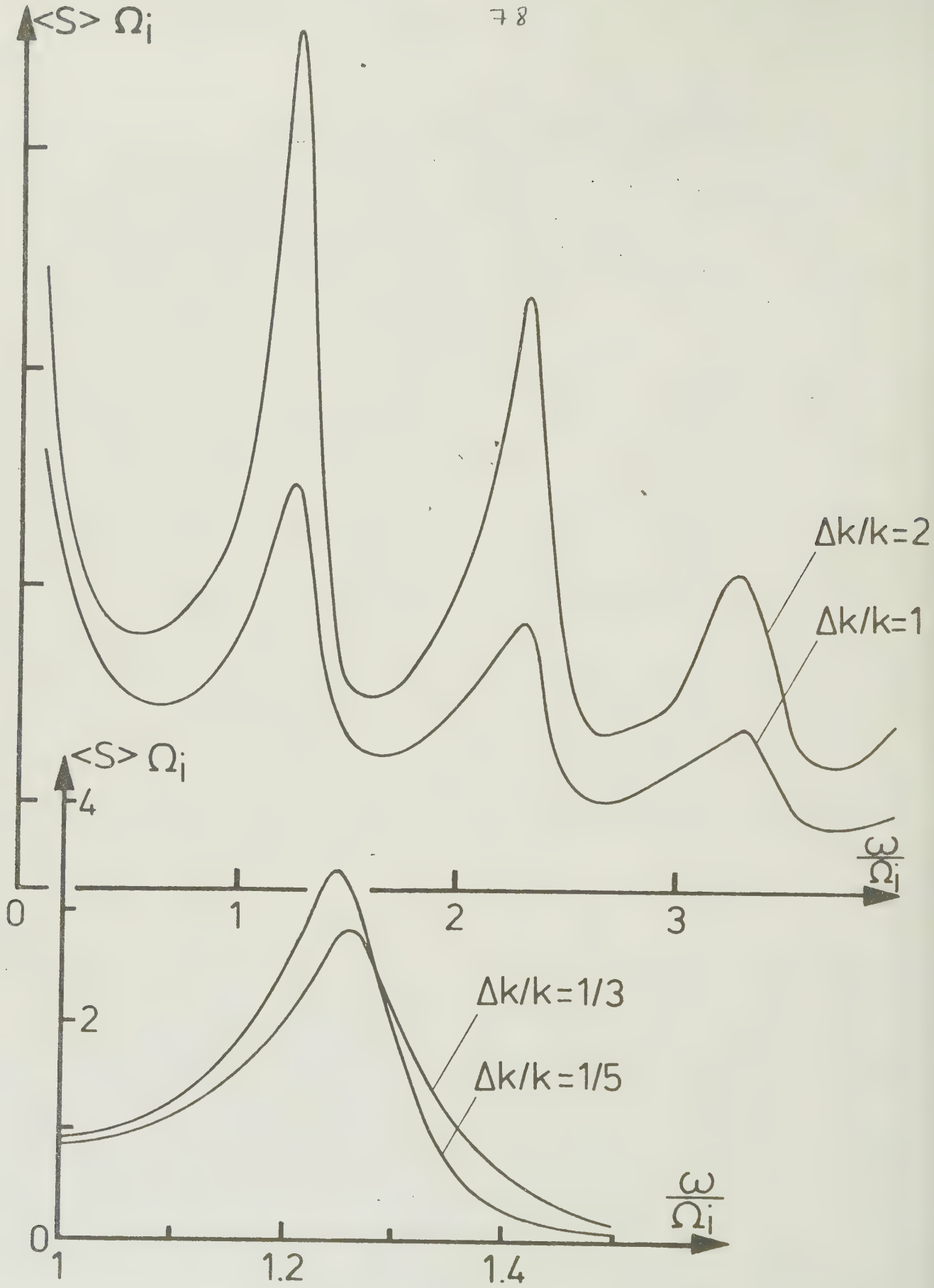
Un autre effet peut provenir d'une erreur de visée sur k_{ns}^{*} : il y a un déplacement de l'extrêmâ que l'on peut tout à fait prévoir, toutes choses étant égales par ailleurs.

L'examen de la courbe de dispersion montre que le maximum est en général assez plat: si la coubure est faible c'est non seulement le point de vitesse de groupe nulle ($V_g=o$), mais aussi toute la région voisine qui sera maximale, d'où un maxima d'autant plus grand que la coubure est petite. On s'attend donc à ce qu'une erreur de visée sur k_{ns}^{*} relativement importante fournisse tout de même une bonne valeur de Te/Ti.

voir l'annexe 4 pour le détail des calculs.

Remarque: cette erreur semble plus ou moins inévitable: la théorie exposée ici fournit la valeur de $(KP)_{ns}^{*}$ et non de K_{ns}^{*}, or dans l'expression du rayon de Larmor des ions est proportionnelle à la racine carrée de la température ionique que l'on cherche justement à déterminer.

La figure 13 illustre cet effet d'erreur de visée.



Figures 11 et 11b : Effet de résolution sur le spectre.
Plasma de Deutérium, Te/Ti = 2,
$(kp)^* = 1.3$, $\frac{\Delta k}{k}$ varie.

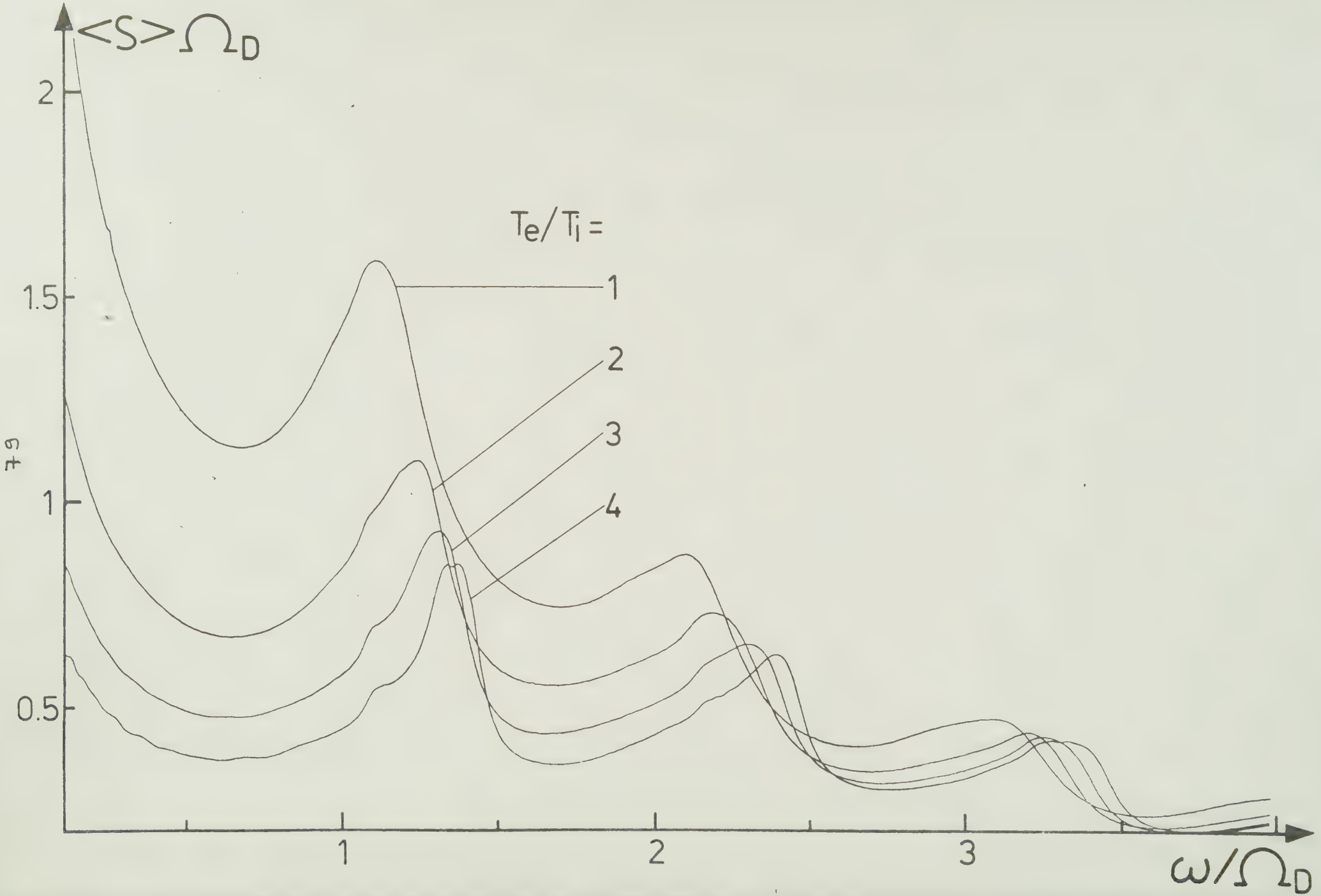


Figure 12 : Allure du facteur de forme utilisé sans pondération due à la géométrie lors de l'intégration

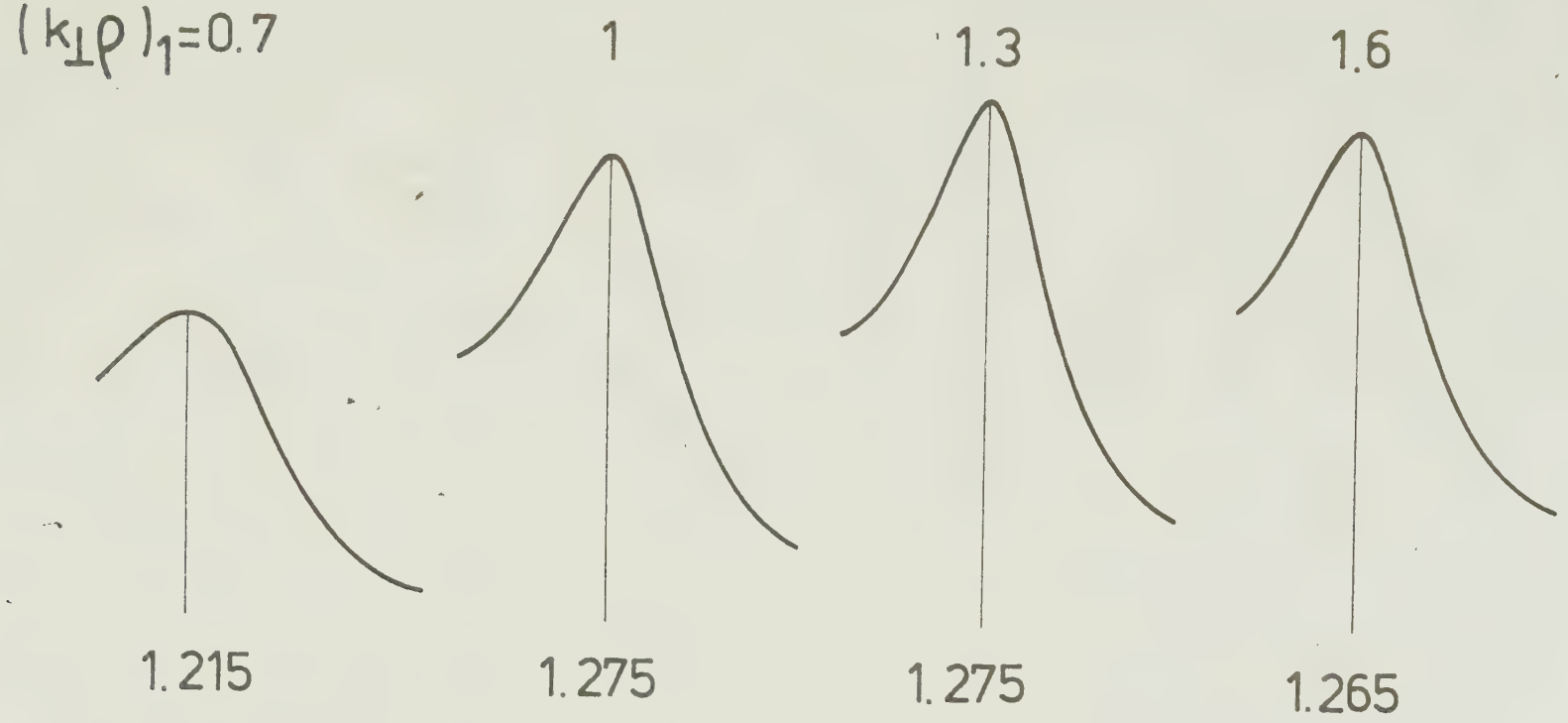


Figure 13 : Effet de l'erreur en $k_\perp$ sur la position du premier extrêma du spectre pour un plasma de Deutérium, Te/Ti=2 .

Conclusion de ce chapitre:

On a montré ici une méthode théorique appuyée par une étude numérique pour déterminer le rapport Te/Ti en calculant le vecteur d'onde sur lequel devrait s'effectuer l'observation des fluctuations de densité ,en montrant qu'une détection en fréquence du spectre de fluctuations devrait permettre la mesure de Te/Ti en pointant les maximas du spectre.Nous avons cependant négligé un certain nombre d'effets susceptibles d'affecter plus ou moins gravement à priori les prédictions faites jusqu'ici.On va en traiter quelques uns dans les deux chapitre suivants.

Références du Chapitre III

(1) W.E. Drummond ,M.N. Rosenbluth, Ph. Fluids 5, 1507 (1962)

(2) S. Ichimaru, Basic Principles of Plasma Physics,Benjamin Inc (1973).

(3) D.M. Kindel,C.F. Kennel, J. of Geophysical Research 76, 3055 (1971).

(4) J.P.M. Schmitt, T. Lehner, Phy.Rev. Letters 45, 1185 (1980).

(5) J.A.Féjer ,CAN. J. of Phy,38,1114-1133 (1960).(b=o),et 39,716 (1961),(b≠o).

(6) J.P. Dougherty, D.T. Farley, D.W. Barron Proc.Roy.Soc London A,263,238-258 (1961).

(7) J.P. Dougherty and D.T. Farley ,J. of Geophysical Research 68, n°19,p.5473 (1963).

(8) E. Holzauer,J.H Massig,PLasma Phy. 20,867 (1978).

(8b) I. B. Bernstein,Phy.Rew.109,n°1 ,10 (1958).

Annexe 2 :

(9) M. Abramowitz,I. Stegun,Handbook of Mathem tical Functions, 9th edition,US Gort.Printing Office, Whasington,DC .

Annexe 1 :

(10) Voir la réf 3 ci-dessus

(11) M.A. Maltkov,V.I. Sutrikov,Sov J.Plasma Phy,6,82 (1980).

(12) T.J. Boyd,D.E. Evans,G.A. Gardner,10th ICIPIG,412,Oxford 197

Annexe 1 du chapitre III.

Calcul de somme particulières contenant des fonctiond de Bessel modifiées de première espèce.

Il s'agit de calculer $X_k = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq k}}^{+\infty} \frac{\Gamma_n(\Lambda_s)}{n-k}$ où: $\Gamma_n(\Lambda_s) = I_n(\Lambda_s)e^{-\Lambda_s}$

On a à évaluer de telles sommes pour obtenir une relation analytique la plus précise possible de la relation de dispersion pour les ondes de Bernstein quasi-neutralisées. Kindel et Kennel ont donné (3 une formule assez précise pour la première harmonique (valable si Te/Ti n'est pas trop petit sinon il faut conserver la fonction Z complète pour l'harmonique considérée), ce qui implique un calcul explicite de X_1. Soit: $X_1 = \sum_{n\neq -1} \frac{\Gamma_n}{1+n} = \frac{1-\Gamma_0(\Lambda_s)}{\Lambda_s}$ (1)

On a en fait à résoudre l'équation de dispersion suivante:

$$1 + \frac{T_i}{T_e} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\omega}{\omega+n\Omega_i}\Gamma_n(\Lambda_i) \qquad \text{avec } \frac{\omega}{\omega+n\Omega_s} = 1 - \frac{n\Omega_s}{\omega+n\Omega_s} \quad (S=i)$$

d'où pour la première harmonique une approximation satisfaisante:

$$\omega = \Omega_i\left(1 + \frac{\Gamma_1(\Lambda_i)}{1+\frac{T_i}{T_e} - \Gamma_1(\Lambda_i) - \frac{1-\Gamma_0(\Lambda_i)}{\Lambda_i}}\right)$$

et non pas (11) la relation suivante (valable seulement si $\Lambda_i \ll 1$):

$$\omega \simeq n\Omega_i\left(1 + \frac{\Gamma_n(\Lambda_i)}{1+T_i/T_e - \Gamma_0 - \Gamma_n}\right)$$

On peut alors établir une relation de récurrence sur trois termes entre les X_n :

$$\begin{cases} X_0 = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{\Gamma_n}{n} = 0 & \text{car } \Gamma_n = \Gamma_{-n} \quad (1) \\ X_1(\Lambda_i) = \frac{1-\Gamma_0(\Lambda_i)}{\Lambda_i} & (2) \\ X_{n+1} = X_{n-1} + \frac{2}{\Lambda_i}(1 - \Gamma_n - n X_n) \quad n\geq 1 & (3) \end{cases}$$

$$(X_k(\Lambda_i=0) = 1/k)$$

D'où une meilleure approximation analytique de la dispersion dans une bande passante donnée autour de la nième harmonique.

Il est possible d'obtenir une expression formelle au moins plus exacte des X_n en introduisant la fonction génératrice de ceux-ci:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k z^k \qquad z\in\mathbb{R}$$

G vérifie l'équation différentielle suivante:

$$\begin{cases} \Lambda_i \neq 0 \\ a = \frac{2}{\Lambda_i} \end{cases} \qquad a z^2 \frac{dG}{dz} + G(1-z^2) = z X_1 + a \sum_{k=1}^{\infty} z^{k+1}(1-\Gamma_k) \quad (4)$$

On peut sommer la série qui apparaît au second membre de (4) en introduisant la fonction génératrice des I_n: $H(t) = e^{\frac{\lambda_i}{2}(t+\frac{1}{t})} = \sum_k t^k I_k(\lambda_i)$

l'équation (4) se réécrivant alors:

$$a z^2 \frac{dG}{dz} + G(1-z^2) = z\left\{ X_1 + a\left\{ \frac{1}{\lambda - \Gamma_0} - (\lambda - \Gamma_0) - e^{+\frac{\lambda_i}{2}(z+\frac{1}{z})} e^{-\lambda_i} \right\}\right.$$

$$G(z) = c(z)\, e^{\frac{1}{a}(z+\frac{1}{z})} \quad \text{avec} \quad c(z) = \left\{ \int_0^z \frac{1}{z'}\left(-\frac{X_1}{a} + \frac{1}{\lambda - z'}\right) e^{-\frac{1}{a}(z'+\frac{1}{z'})} dz' + \text{cte} - a^{-\lambda_i}(\log|a|) \right\}$$

d'où en fixant les constantes d'intégration une solution formelle:

$$X_k = \frac{1}{k!} \left.\frac{d^{(k)}G}{dz^{(k)}}\right|_{z=0}$$

Malheureusement la solution de l'équation différentielle présente une singularité en z=o et il n'est pas possible d'obtenir une solution explicite simple pour les Xn, on peut par contre trouver des relations entre ceux-ci en developpant G autour de tout autre point où elle est définie, z=1 par exemple.

Annexe n°2 du chapitre III.

Présentation du programme numérique.

-Singularités.

La difficulté principale de cette intégration provient des singularités de la fonction S(k,w) pour certaines va--leurs de k et de w.

*pour w: il n'y a pas de singularité à fréquence nulle où S est finie et présente un extré mum local.

, autour de Wv nWci les singularités apparentes sont artifi--cielles en ce sens que ces valeurs de W ne sont pas solu--tion de la relation de dispersion comme l'a montré I;Bern--stein (8) et que donc le dénominateur de S reste fini pour ces valeurs.

$$\lim_{\omega - n\Omega_{ci}} \omega S = 0 \quad \sim \quad k_{//}^4 e^{-\left(\frac{\omega - n\Omega_{ci}}{k_{//}v_i}\right)^2} \quad \text{(ondes BGK)}$$

*pour K: le seul problème qui puisse intervenir concerne le cas :K//=0.Dans ce cas il est facile de voir que :

$$k_{//}\to 0 \quad Re\,H_i = 0 \quad \text{et} \lim_{k_{//}\to 0} \omega S = 0 \quad \text{comme} \quad \left(\sqrt{\pi}\frac{v_i}{v_e}\right)^{-1} \frac{|k_{//}|}{\omega} \quad \text{(ondes BGK)}$$

et par conséquent on a une fonction continue en zéro pourk// mais à dérivée discontinue à cause de la valeur absolue.

*D'autre part lorsque la relation de dispersion est vérifiée comme l'amortissement bien que faible n'est pas nul(plasma stable) il n'y a aucune singularité particulière.,

Le programme numérique.

Ce dernier doit beaucoup à J.Schmitt(pour ne pas dire tout) Une étude préliminaire avec une intégration assez grossière par la classique méthode des trapèzes donne un résultat assez satisfaisant dans chaque intervalle de fréquence d'amplitude une fréquence cyclotronique ionique mais ne permet pas de faire le lien entre les différents intervalles Il faut recourir à des méthodes plus précises telles que la méthode d'intégration de Gauss bien adaptée au type de fonctions contenues dans S(k,w).(voir la référence (9) pour les méthodes de calcul numérique)

Décrivons succintement les différentes étapes du program -me numérique qui s'avère finalement remarquablement simple. (voir le "listing" en fin d'annexe)
La seule vraie difficulté de ce programme aurait été le calcul correct de la fonction de magnétoplasma Z (qui a été tabulée (10) il y a déja longtemps). Nous éludons ce probléme tant que l'argument de cette fonction est réel (ce qui ne sera pas le cas lorsque l'on traite des collisions, nous aurons l'ocassion d'y revenir plus tard
Nous devons ici à J.Schmitt une astucieuse modélisation de Z(x) pour x réel: (précision de l'ordre de 1o% pour x voisin de 1 et meilleure que 5% ailleurs)

pour $|x| < 0.3$ $\quad Z(x) \simeq x\left(\frac{1}{3}x^2 - 2\right) + i\sqrt{\pi}\, e^{-x^2}$

pour $0.3 < |x| < 5.1$ $\quad Z(x) \simeq -2x\,\dfrac{1+\frac{2}{3}x^2}{1+\frac{4}{3}x^2+\frac{4}{3}x^4} + i\sqrt{\pi}\, e^{-x^2}$

pour $|x| > 5.1$ $\quad Z(x) \simeq -\left(\frac{0.8}{x}\right)\left\{\frac{5}{4} + \left(\frac{0.8}{x}\right)^2\right\} + i\sqrt{\pi}\, e^{-x^2}$

On peut ajouter que lorsque $|x| > 10$ la forme asymptotique de Z est tout à fait suffisante.

$$Z(x) \simeq -\frac{1}{x} + i\sqrt{\pi}\, e^{-x^2}$$

Les étapes de ce calcul sont les suivantes:

Le calcul de Z appelé Function Zpla dans le programme.
Un calcul approché (précision de l'ordre de 2%) des fonctions de Bessel modifées de première espèce In(x) ce calcul est rendu facile grâce à la relation de récur -rence entre ces fonctions :

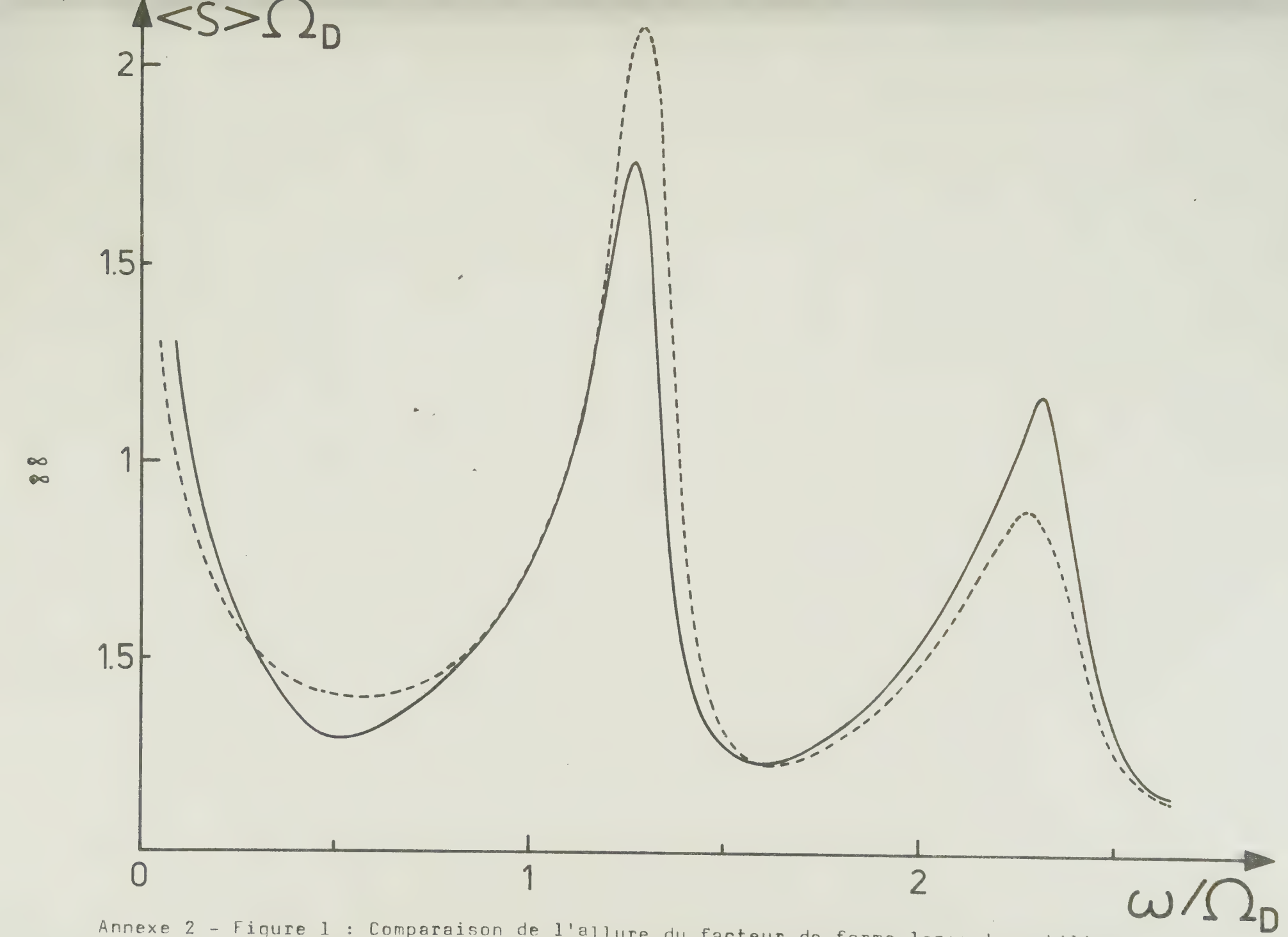
In+1(x)=-2/x *In(x) +In-1(x)

ceci est réalisé dans le sous-programme Sub Bess
On fait le calcul des arguments de la relation de dispersion Hi,i Hi,r He,i He,r dans le sous-programme Sub Turb.
L'intégration dans la boule gaussienne en prenant 25* 25 points pour une fréquence donnée est effectuée dans le sous-programme Sub PIein.
Enfin les résultats sont rassemblés dans le sous -prog- ramme Sub Spec à partir duquel sont écrits les résultats

pour une vitesse de dérive donnée et un rapport Te/Ti fixé,en fonction de la fréquence.

Le programme est d'un emploi très souple et permet en changeant peu de paramètres de réaliser par exemple une rotation de 90 degrés de k pour étudier le spectre acoustique ionique,d'incorporer un modèle collisionnel simple ou d'intégrer le spectre en fréquence.Nous utiliderons ces opérations ultérieurement.

On a utilisé pour comparaison une expression "exacte" de la fonction de dispersion que l'on compare à la fonction "rapide" utilisée ci-dessus.La figure 1 montre la différence qui est assez faible, la courbe en traits plein représente l'utilisation de la fonction Z plus exacte,la courbe en pointillés celle de la fonction "rapide".



Annexe 2 - Figure 1 : Comparaison de l'allure du facteur de forme lorsqu'on utilise

Annexe n°3 du chapitre III.

Prédiction de la position des extrémas après intégration numérique.

On a vu dans le chapitre III que l'intégration sur les nombres d'onde provoquait un léger décalage des extrémas en fréquence. On se propose ici de prédire ce décalage.

Il y a deux types de correction à effectuer, celles dues à la dispersion complète et celles dues à la courbure de la disper--sion.

1) Corrections dues à la dispersion complète.

Il faut tenir compte de la dispersion complète lorsqu'on intègre le spectre car pour une résolution suffisamment faible ($\Delta k/k$ grand) le vecteur d'onde peut prendre des composantes parallèles au champ magnétique telles que notre approximation qui correspond à des modes se propageant dans une direction proche d'une perpendiculaire à B tombe en défaut.

La dispersion complète est réecrite à la page suivante et l'on effectue des corrections différentielles pour prédire l'éventuel décalage des extrémas. (tout est rapporté à l'espèce Hydrogène, les fréquences sont normalisées aux fréquences cyclotroniques et les vecteurs d'onde à l'inverse des rayons de Larmor)

$$\frac{k^2\Omega_H^2}{2\omega_{H_o}^2} + \sum_s \frac{Z_s n_s^2}{n_e} \sum_n \Gamma n\left(\Lambda_H \frac{m_s}{Z_s^2}\right)\left(1+\sqrt{m_s}\,\frac{\omega}{k_{//}}\,Z\left(\sqrt{m_s}\,\frac{\omega-\frac{nZ_s}{m_s}}{k_{//}}\right)\right)$$

$$+ \frac{T_i}{T_e} Z' \frac{\left(\sqrt{\frac{m_e}{1}\,\frac{T_i}{T_e}}\,\frac{\omega}{k_{//}}\right)}{(-2)} = 0$$

$$Dr_o = Zeff + \frac{T_i}{T_e} - \sum_s \frac{n_s Z_s^2}{n_e} \sum_n \Gamma n\left(\Lambda_H \frac{m_s}{Z_s^2}\right) \frac{\omega}{\omega-\frac{nZ_s}{m_s}}$$

$$\Delta Dr = \frac{1}{2}\frac{k^2\Omega_H^2}{\omega_{Ho}^2} - \sum_s \frac{n_s}{n_e}\frac{Z_s^2}{m_s} \sum_n \Gamma n\left(\Lambda_H \frac{m_s}{Z_s^2}\right) \frac{\omega}{\left(\omega-\frac{nZ_s}{m_s}\right)^3} \frac{k_{//}^2}{2} - \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^2 m_e \frac{2\omega^2}{k_{//}^2}$$

$$+ \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^2 m_e\, 2V_{de}\left(\frac{2\omega}{k_{//}} - V_{de}\right)$$

$$\frac{\partial D\Omega}{\partial\omega} = \sum_s \frac{n_s Z_s^2}{n_e} \sum_n \Gamma n\left(\Lambda_H \frac{m_s}{Z_s^2}\right) \frac{n Z_s/m_s}{(\omega-nZ_s/m_s)^2}$$

$$\text{et } Di = \sqrt{M} \sum_s \frac{n_s Z_s^2}{n_e} \sum_n \Gamma n\left(\Lambda_H \frac{m_s}{Z_s^2}\right) \sqrt{m_s}\,\frac{\omega}{k_{//}}\, e^{-m_s \frac{\left(\omega-\frac{nZ_s}{m_s}\right)^2}{k_{//}}}$$

$$+ \left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{3/2} \sqrt{m_e}\left(\frac{\omega}{k_{//}} - V_{de}\right)$$

Spécialisons nous au cas d'un seul ion, qui sera l'ion majoritaire dans le cas d'un mélange.

$$\Delta Dr = \underbrace{2\frac{k_\perp^2(\Omega_s)^2}{\omega p_s^2}}_{\Delta Dr} - \underbrace{\sum_n \Gamma n \frac{\omega}{(\omega-n)^3}\frac{k_{//}^2}{2}}_{\Delta Dr\ //i} - \underbrace{\frac{T_i}{T_e} 2\left(\frac{V_s}{V_e}\frac{\omega}{k_{//}}\right)^2}_{\Delta Dr\ //e}$$

$$+ \frac{T_i}{T_e} 2\,V_{de}\underbrace{\left(2\frac{v_s}{v_e}\frac{\omega}{k_{//}} - v_{de}\right)}_{\Delta Dr\ v_{de}}$$

$\Delta D_{r,d}$ est une correction de densité finie : dans les tokamaks $\frac{\omega_{pi}^2}{\Omega i^2} \ll 1$, ce qui fait que la dispersion est peu sensible à la densité.

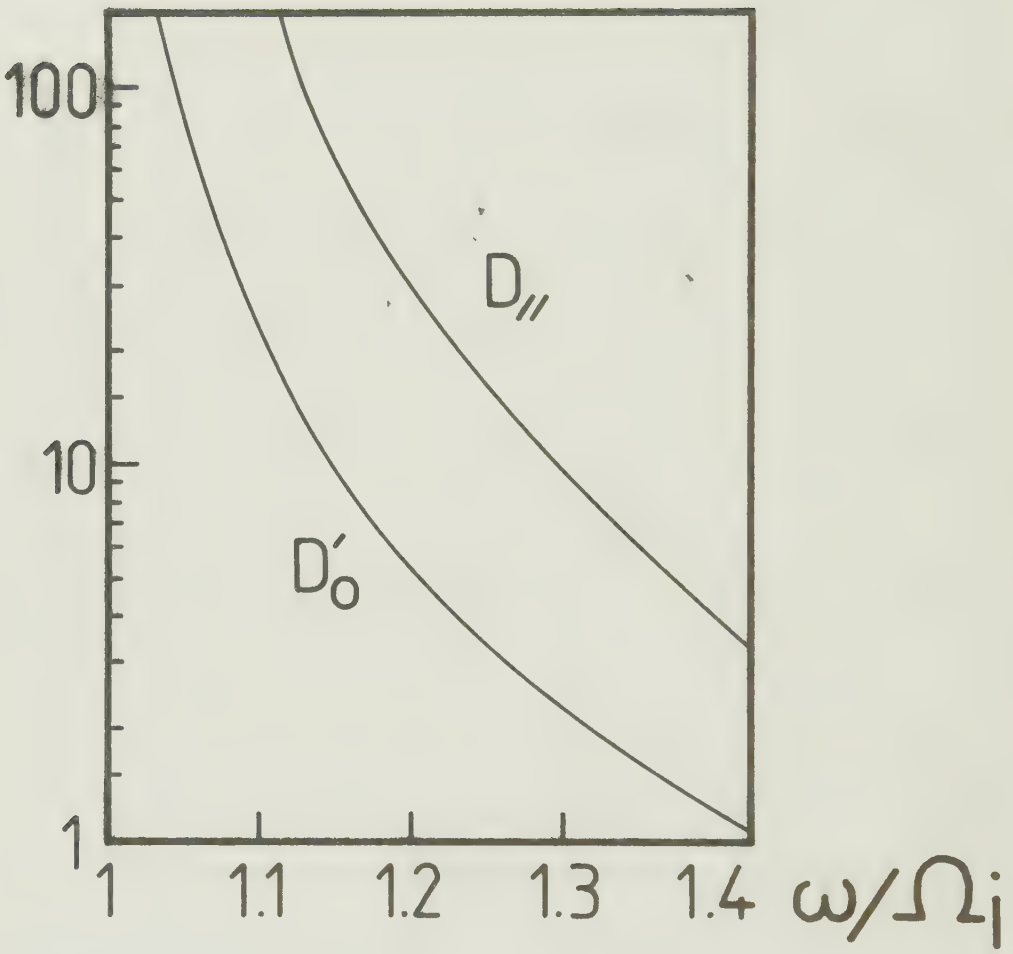
$\Delta D_{r\,//i}$ est la correction en $k_{//}$ fini pour les ions, $\Delta D_{r\,//\,e}$ est cette même correction pour les électrons.

ΔD_rvde est la correction due à une vitesse de dérive non nulle.

La table ci-dessous donne les valeurs numériques de ces corrections pour quelques rapports $\frac{Te}{Ti}$ pour la première harmonique d'un plasma de Deutérium. $k_{//}$ est pris en $k_{//}^*$ et vde au seuil d'instabilité vde*.

$\frac{Te}{Ti}$	$k_{//}^* p$	$\Delta D_{r,d}.10^3$	ΔDr //i	ΔDr //e	ΔDr vde*
1	0.075	1.08	- 0.157	- 0.131	0.07
1.5	0.094	0.95	- 0.102	- 0.046	0.045
2	0.11	0.85	- 0.082	- 0.018	0.018
3	0.134	0.72	- 0.063	- 0.0061	0.006
4	0.152	0.62	- 0.046	- 0.0029	0.0029

De cette table, on déduit la position prédictible du sommet ω_r (repéré par *) que l'on compare à la valeur numérique ω_r ordinateur et de la courbe 1 de la présente annexe donnant D_v.



Annexe 3 - Figure 1 : Fonction permettant la correction sur la fréquence du point le moins stable en fonction de $k_{//}$ et V_{de} pour un plasma de Deutérium.

$\frac{Te}{Ti}$	Ωns^{**}	Ωns^{**} vde*	ω ordinateur
1	1.198	1.190	1.170
1.5	1.253	1.243	1.230
2	1.303	1.297	1.275
3	1.383	1.380	1.350
4	1.443	1.441	1.400

- Effet de "courbure" dans l'intégration :

Cet effet est dû au fait qu'étant donné une fonction $S(x,y,z)$ qui est maximale pour $x = x^{*}$ et $y = y^{*}$, ce qui correspond à une valeur $z = z^{*}$ dans le cas où il existe une relation implicite $Z(x,y)$ alors $G(z) = \int_{D(x,y)} dxdy \; S(x,y,z)$ est-elle maximale en $z = z^{*}$?

La réponse est en général négative mais il est clair que dans le cas d'un "point selle" de l'intégrand et d'un domaine d'intégration centré autour de ce point, on s'attend à ce que le décalage du maximum soit faible, $G(z)$ maximale en $z = z^{**}$ voisin de z^{*}.

Nous n'avons pas réussi à obtenir une formule analytique exacte dans le cas qui nous occupe. Cependant un calcul numérique simple (effectué ci-dessous dans un cas particulier) permet de conclure que c'est bien cet effet de

"courbure" qui est responsable de la différence entre les valeurs théoriques et les valeurs numériques.

Prenons l'exemple d'un plasma contenant une seule espèce ionique ; les hypothèses simplificatrices suivantes sont effectuées :

- Correction en $k_\perp$: on néglige la variation de l'exponentielle de pondération autour de $k_\perp = k^*_{lio_\perp}$ et on fait une approximation parabolique autour de cette valeur pour le coefficient D_r approchée, et avec ω voisin de $\Omega_{ns}^{**} = \omega^{**}$

$$D_r(\omega,k_\perp) \simeq \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 D_2}{\partial k_\perp^2}(k_\perp-k_\perp^*)^2 + \frac{\partial D_2}{\partial \omega}\Big|(\omega-\omega^{**}) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 D_2}{\partial \omega^2}\Big| (\omega-\omega^{**})^2$$

Soit $D_r = a(k_\perp-k_\perp^*)^2 + b(\Delta\omega)$

On calcule alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_-}{|D_r|^2+|Di|^2} \simeq \frac{\pi}{Di}\,\mathrm{Im}\left[D.P.\left\{\sqrt{\frac{b+iDi}{a}}\right\}\right] = G(k_{//},\omega)$$

(Di est mis pour $k_\perp = k_\perp^*$) | (choisir la détermination principale à partie réelle > 0)

à ce stade si on fait $k_{//} = k_{//}^*$ et que l'on extrèmalise G par rapport à ω on constate qu'une partie seulement des effets d'intégration sont pris en compte.

- Correction en $k_{//}$: C.P. vde = o.

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(k_{//},\omega)\ G(k_{//},\omega)\ dk_{//}$$

avec $f(k_{//},\omega) = e^{-(\frac{k_{//}}{\Delta k})^2}\ [A + B\ h(k_{//},\omega)]$

$$A = \frac{Vi}{Ve} \qquad B = \Gamma n(\Lambda \overset{*}{n}s) \qquad h(k_{//},\omega) = e^{-[\frac{\omega - n\Omega s}{k_{//}\ ns}]^2}$$

et $Di = \frac{\omega}{k_{//}}\ H = \frac{\omega}{k_{//}}\ [A\ \frac{Ti}{Te} + B\ h(k_{//},\omega)]$

Signalons ici qu'il est possible d'effectuer le calcul analytique exact si on effectue un développement à nouveau parabolique pour Di autour de $k_{//}^{*}$ mais que le résultat extremalisé par rapport à la fréquence ne rend pas compte du décalage observé c'est que l'on ne peut négliger ici la variation de l'exponentielle de pondération pour $k_{//}$.

Soit donc à calculer

$$I(\omega) = \frac{1}{\omega}\ \frac{\pi}{\sqrt{2|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} [(b^2+Di^2)^{\frac{1}{2}}-b]^{\frac{1}{2}}\ e^{-(\frac{k_{//}}{\Delta k})^2}\ (1+H(\frac{1-\frac{Ti}{Te}}{H}))\ dk_{//}$$

On extrémalise ensuite $I(\omega)$: I est maximale pour $\omega = \omega^{***}$.

On a effectué le calcul pour $\frac{Te}{Ti} = 2$ et du Deutérium pur pour $\Delta k/k = 50$ % par une méthode de Gauss à 10 points sur une calculatrice de bureau HP29C : pour $\Delta\omega$ donné, on calcule les différents coefficients nécessaires à l'intégration et on fait varier $\Delta\omega$ pour obtenir I maximale. Dans ce cas $\omega^{***} = \omega^{**} + \Delta\omega =$ ω ordinateur = 1.275. On trouve alors la bonne valeur, à la précision ($5\ 10^{-3}$) du pas choisi sur l'ordinateur près. Ce

calcul est valable pour tout $\frac{Te}{Ti}$ et pour toute harmonique n si l'exponentielle de pondération en k_1 est pris en compte.

Annexe 4 du chapitre III.

Corrections d'erreur de visée.

Repartant du système d'équations (II), du chapitre , on effectue simplement un développement autour de Λns^* : ici Ωns^* désigne en fait $\Omega ns^*/\Omega s$.

$$\frac{Ti}{Te} + \sum_{n=1}^{\infty} [\Gamma n(\Lambda ns^*) + \Gamma' n(\Lambda ns^*)\,\Delta\Lambda + \Gamma'' n(\Lambda ns^*)\,\frac{\Delta\Lambda^2}{2!}]$$

$$[\frac{2n^2}{n^2 - (\Omega ns^*)^2} + \frac{2n^2}{n^2 - (\Omega ns^*)^2}\,2\,\Omega ns^*\,\Delta\omega\,] = 0$$

$$(II)' \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2n^2}{n^2-(\Omega ns^*)^2}\,\Gamma' n(\Lambda ns^*)\,2\,\Omega ns^*)\,\Delta\Lambda\Delta\omega$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^2-(\Omega ns^*)^2}\,\Gamma n(\Lambda ns^*)\,2\Lambda ns^*\,\Delta\omega$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^2-(\Omega ns^*)^2}\,\Gamma'' n(\Lambda ns^*)\,\frac{\Delta\Lambda^2}{2} = 0.$$

Si l'on conserve les termes d'ordre le plus bas :

$$\Delta\omega = -\frac{\Delta\Lambda^2}{2}\,A \text{ avec } A = \frac{1}{2(\frac{\Omega ns^*}{\Omega s})} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^2-[\frac{\Omega ns^*}{\Omega s}]^2}\,\Gamma'' n(\Lambda ns^*)}{\sum_{1}^{\infty} \frac{2n^2}{[n^2-(\frac{\Omega ns^*}{\Omega s})^2]}\,\Gamma n(\Lambda ns^*)}$$

Si l'on est près de l'harmonique $n\Omega s$:

$$H \simeq -[n^2 - (\frac{\Omega ns^*}{\Omega s})^2]\,\frac{\Gamma'' n(\Lambda ns^*)}{\Gamma n(\Lambda ns^*)} \times \frac{1}{2(\frac{\Omega ns^*}{\Omega s})}$$

Le calcul est identique en présence d'impuretés, avec cette fois $H' < H$, d'où un pic d'amplitude plus élevée.

$$H' = H \times \left(1 - \sum_{s\neq i} \frac{n_s Z_s^2}{n_e}\right) \Big/ \left(1 + \sum_{s\neq i} \frac{n_s Z_s^2}{n_e} \frac{\Lambda^*_{ns}\left(n^2\left(\frac{\Omega ns^*}{\Omega s}\right)^2\right)^2}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{n^2-\left(\frac{\Omega ns^*}{\Omega s}\right)^2}\,\Gamma''(\Lambda ns^*)}\right)$$

CHAPITRE IV

Pages

INTRODUCTION D'EFFETS COMPLEMENTAIRES : VITESSE DE DERIVE, IMPURETES. 98

1) Présentation sur le spectre acoustique ionique. 99

. Impuretés présentes dans un Tokamak. 99

. Quelques caractères généraux du spectre acoustique ionique. 100
Intégration numérique de ce facteur de forme. 100

. Influence d'une vitesse de dérive. 111

. Mesure de la charge effective. 114

2) Application au spectre cyclotronique ionique. 114

. Cas d'un mélange de gaz. 114

. Impuretés légères et lourdes. 115

. Influence d'une vitesse de dérive. 120

3) Observation du spectre cyclotronique ionique dans les plasmas de laboratoire. 125

Conclusion de ce chapitre. 130

Annexe 1 : Relation de dispersion dans le cas de la propagation parallèle au champ magnétique ; 131

. Dispersion. 131

. Seuil d'instabilité. 131

. Intégration du facteur de forme si K//B. 132

Annexe 2 : Discussion de la méthode auparavant proposée pour la mesure de la charge effective Z. 134

Annexe 3 : Correction sur la mesure de Te/Ti lorsqu'il existe des impuretés. 135

Annexe 4 : Abaques du facteur de forme pour le mélange D-H. 138

Références. 150

Introduction d'effets complémentaires.

1) Présentation sur le spectre acoustique ionique.

On se souvient que l'on avait passé rapidement en revue à la fin du chapitre I les différents modes ioniques existant dans un magnéto_plasma chaud et infini.Lorque l'angle de propagation Θ_B se rapproche de la valeur nulle ,les particules ne sont plus sensibles au champ magnétique dans leur intera--ction avec les ondes et on retrouve la situation en champ nul donc les ondes acoustiques ioniques auxquelles on va un peu s'interesser ici.

On va étudier brièvement car il est déjà bien connu le facteur de forme "acoustique ionique" pour dégager l'influence de quelques effets qui valent que l'on s'y arrête puisqu'ils rendent "caduc" les diagnostics utilisant l'observation des ondes acoustiques pour mesurer la température ionique.(voir la réf 1 du cha I et la réf 9 du présent chapitre notamment) Les effets qui mettent en défaut cette dernière proposition sont principalement dûs aux impuretés présentes dans une décharge.Disons d'abord quelques mots sur les impuretés.

a) Impuretés présentes dans les"Tokamaks".

Nous distinguerons le cas des impuretés de celui des mélanges.On peut classer les impuretés en légères et lourdes. Les impuretés legères qui sont désorbées sur les parois de l'enceinte sont principalement O,C,N.Les impuretés lourdes dont Fe,Ni,Mo,W, sont les principaux constituants "usuels" proviennent des murs de la chambre à vide et du limiteur (qui a été a un certain moment en Mo dans TFR).Comme le dernier potentiel d'ionisation reste inférieur à l'énergie thermique électronique pour les atomes légers ,les impuretés

légères se trouvent complétement ionisées au centre de la machine. Par contre les derniers potentiels d'ionisation des atomes lourds peuvent être supérieurs à kTe (ex: =2.4 Kev pour W^{66+} ,kTe $\underline{v}$1 Kev) et par conséquent les impuretés lourdes sont partiellement ionisées avec toute une variété possible de charges correspondant à la décroissance radiale de la température électronique depuis le centre de la machine.Par exemple des études de spectroscopie fine des raies de radiation émises par ces particules (dont on peut déduire par des modèles d'ionisation la densité d'impuretés,le transport des particules etc) ont conduit à etudier des ions plusieurs fois chargés tels Fe^{18+},Fe^{25+},Ni^{27+},Mo^{30+},Mo^{33+},W^{18+},W^{66+},etc... Tout ceci peut se caractériser par l'introduction d'un paramètre assez difficile à mesurer:la charge effective Zeff que l'on peut définir par $Zeff=\frac{\sum_{s\neq i} n_i z_i^2}{\sum_{s\neq i} n_s}$ ou parfois par $\bar{Z}=\frac{\sum_{s=i} n_i z_i^2}{n_e}$ Nous verrons que ce paramètre a une influence faible et d'ailleurs prédictible sur notre diagnostic.

b) Quelques caractères généraux du spectre acoustique ionique.

On rapelle que la figure 1b du chapitre I montre la densité spectrale $S(k,\omega)$ pour une observation parallèle au champ magnétique:on reconnaît les épaulements acoustiques ioniques à basse fréquences.La figure 1 extraite de la référence (1) illustre à nouveau $S(k,\omega)$ en présence d'impuretés.Ce spectre peut être notablement déformé par les impuretés comme l'a bien montré Evans(2). La série de courbes des figures 2 à 4 empruntées à cet auteur illustre parfaitement ce point.

Intégration numérique de ce facteur de forme.

Il restait à tenir compte d'une résolution réaliste en nombre d'onde d'où la nécéssité d'effectuer une intégration numérique analogue à celle faite au chapitre précédent dans le cas cyclotronique.

Il est possible de faire cette intégration de manière approchée

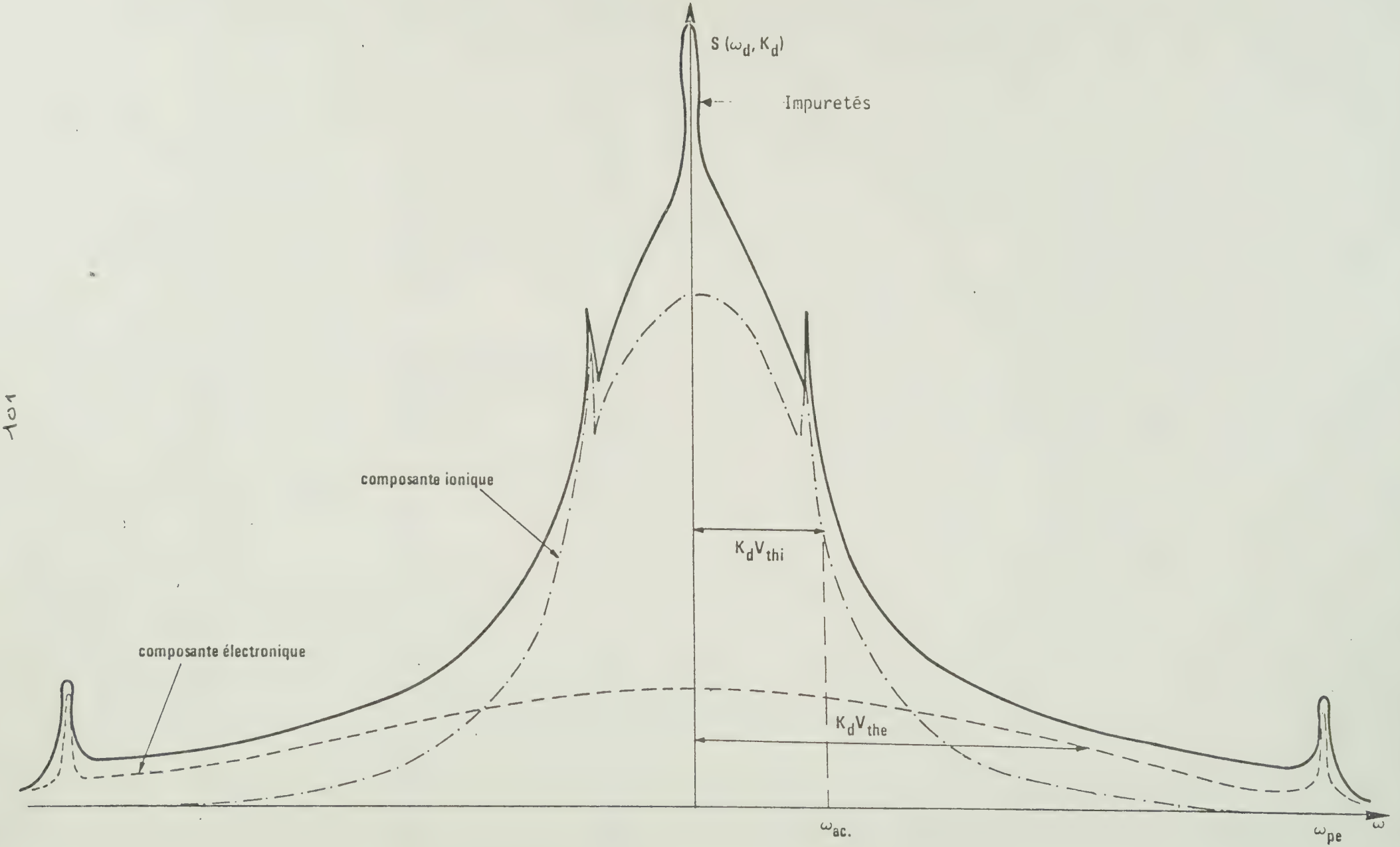


Figure 1 : Allure du facteur de forme acoustique ionique S(ω,k) (réf 1)

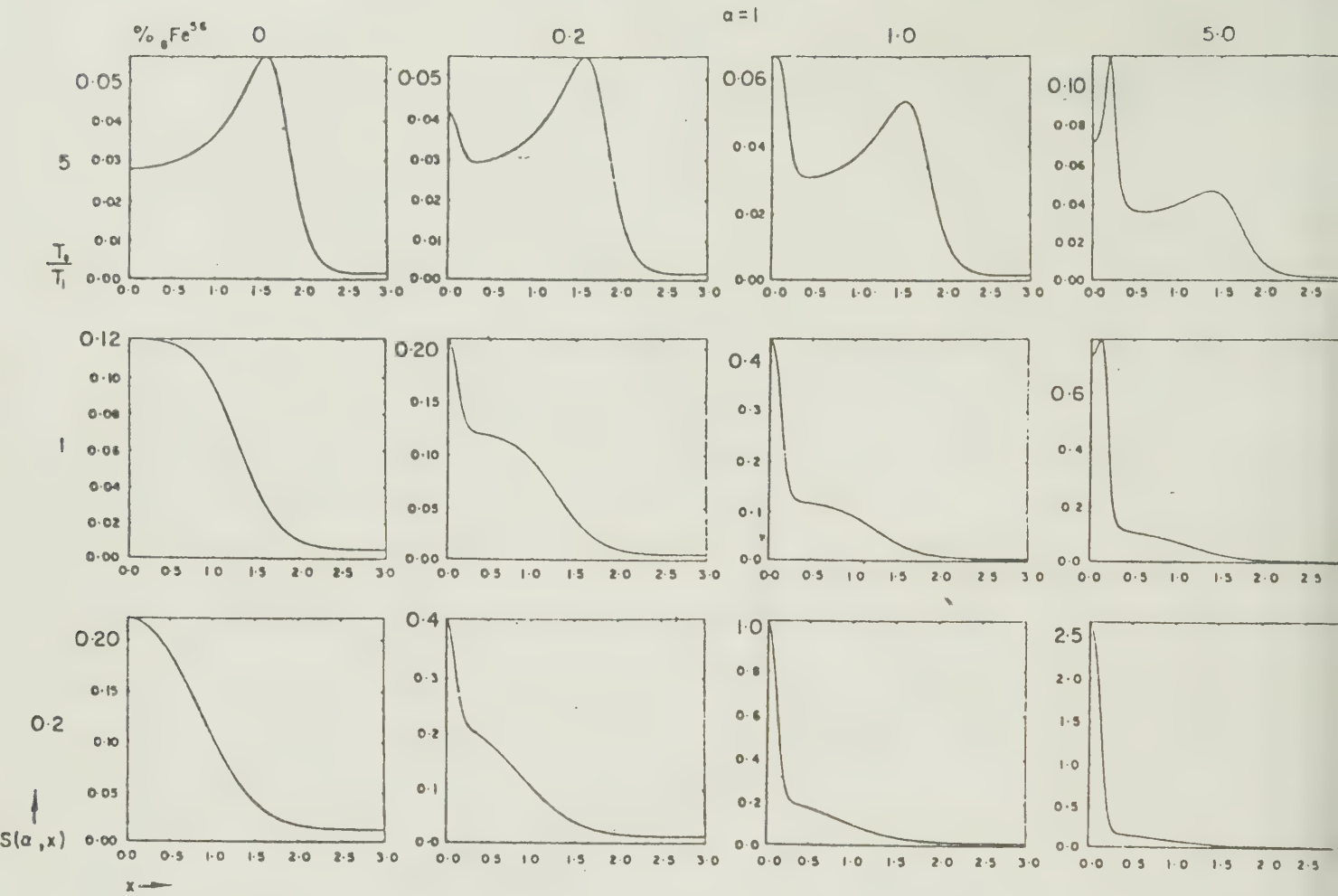


Figure 2 : Caractéristique ionique du facteur de forme acoustique ionique ; plasma d'hydrogène et de Fe^{8+} en proportions variables (0 %, 0.2 %, 1 %, 5 %).

En abscisses : $x = \frac{\omega}{kV_i}$, $\alpha = \frac{1}{k\lambda_d} = 1$

(réf 2)

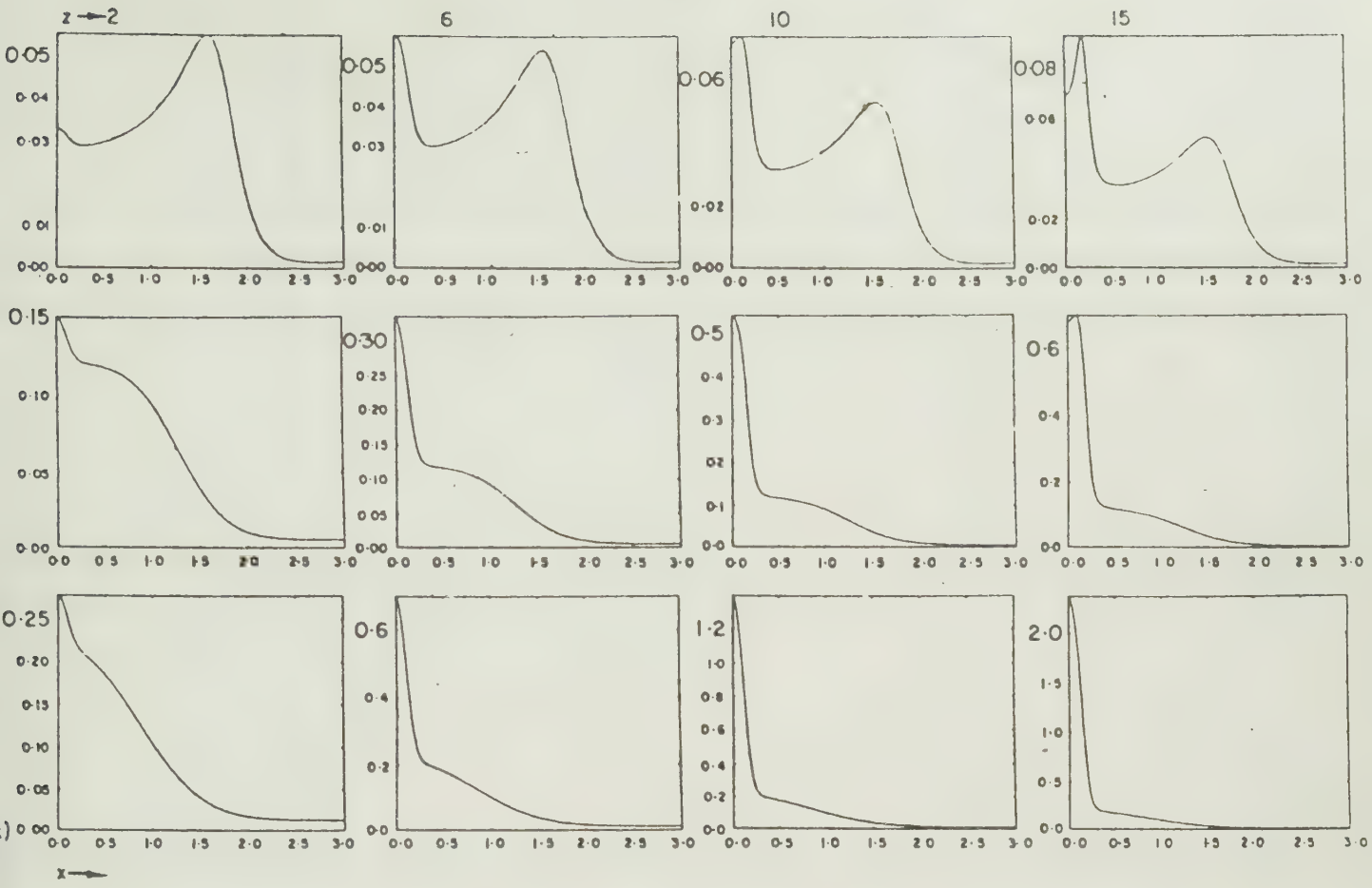


Figure 3 : Caractéristique ionique du facteur de forme. Plasma H^+ + 1 % Fe^{Z+}, la charge Z varie.

$\frac{Te}{Ti}$ = 1, les électrons sont chauds puis froids.

En abscisses : $x = \frac{\omega}{kV_i}$, $\alpha = \frac{1}{k\lambda d} = 1$

(réf 2)

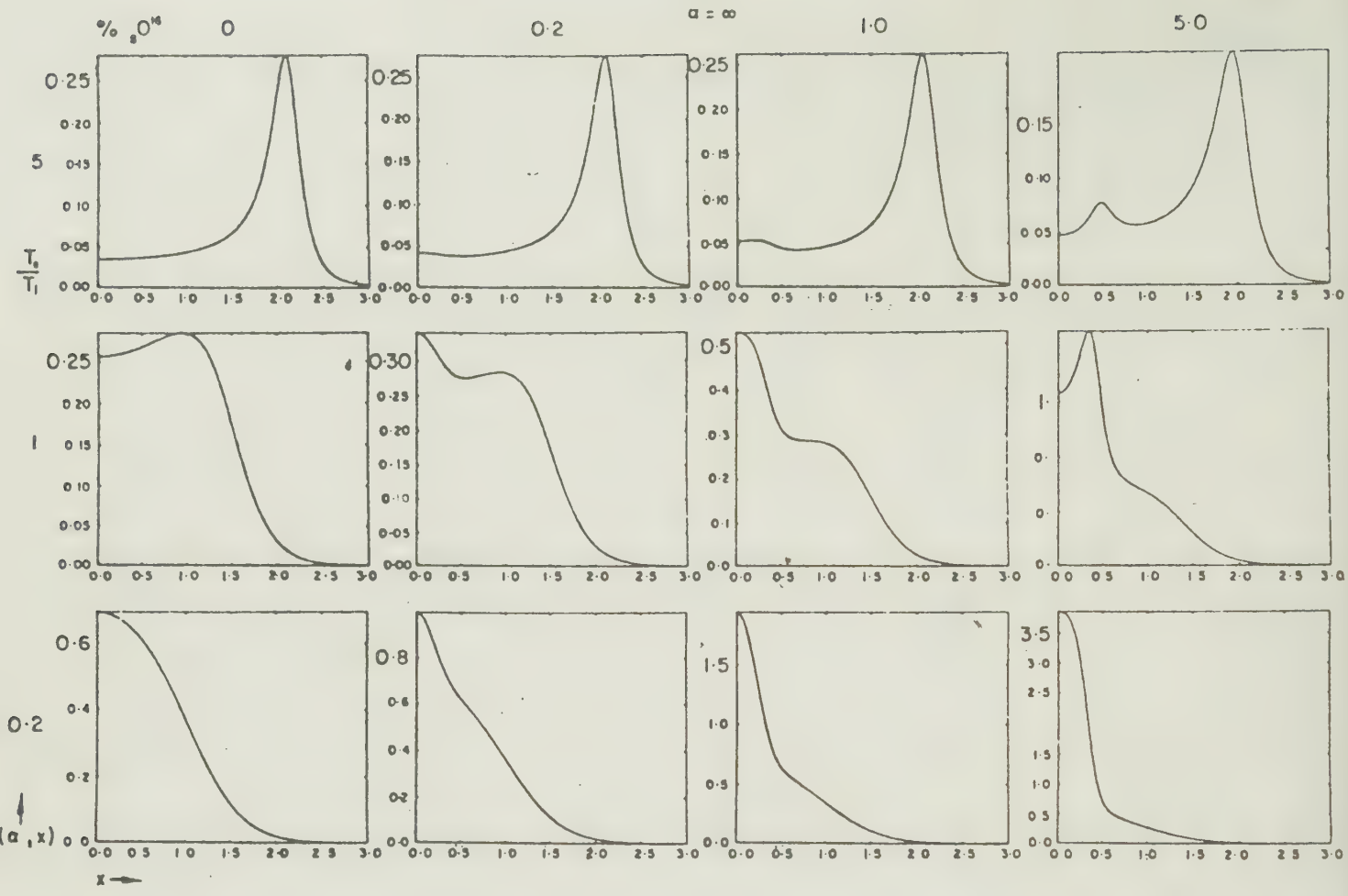


Figure 4 : Caractéristique ionique du facteur de forme pour des plasmas d'hydrogène et d'ion O^{8+} en proportions variables (0 %, 0.2 %, 1 %, 5 %), $\alpha = \frac{1}{k\lambda_d} \simeq \infty$

(réf 2)

voir pour cela l'annexe 1 et la coube 5 pour le cas d'un plasma d'Argon.On peut aussi faire un calcul plus exact en échangeant convenablement le rôle de K// et $K_{\perp}$ dans notre programme numérique.(On effectue alors une intégration après avoir fait une rotation de 90 degrés qui amène le vecteur d'onde quasi-parallèlement au champ magnétique).Il faut préciser toutefois que la résonance acoustique ionique proprement dite n'a lieu que lorsque la température ionique est très inférieure à la température électronique $Te/Ti \gg 1$,ce qui fait que les ondes acoustiques fortement amorties par effet Landau sur les ions ne doivent leur existence dans les "Tokamaks" (pour lesquels $Te/Ti \lesssim 1$) qu'à l'existence de forts courants de dérive parallèles à B.La figure 6 montre la transition entre la contribution électronique et la contribution ionique à cette résonance lorsque le rapport Te/Ti varie (d'après (3)). La figure 7 montre le spectre intégré lorsque le rapport Te/Ti varie de 1 à 4.L'épaulement acoustique ionique se déplace alors comme $\sqrt{Te/Ti}$ ce qui est conforme au fait que la relation de dispersion est donnée dans la limite des grandes longueurs d'onde devant la longeur de Debye par $w \simeq k c_s$ (où $k \simeq k_{//}$ et c_s est la vitesse acoustique ionique: $c_s = [kTe/mi(1+Ti/Te \cdot 3)]^{1/2}$, voir l'annexe 1) La figure 8 montre ce que devient le spectre lors d'un mélange de Deutérium et de 20% d'Hydrogène,un mélange courant dans les décharges actuelles des "Tokamaks".On constate que l'allure du spectre est analogue à celui du Deutérium pur .Cependant lorsque la proportion d'hydrogène devient notable ,et ceci restera pour une impureté,il apparaît un pic acoustique supplémentaire correspondant à la résonance pour l'éspèce ajoutée.On considère le cas d'impuretés lourdes à la figure 9.Le spectre est très déformé aux basses fréquences puisque la position des extrêmas varie comme kc_s avec $c_s \simeq 1/\sqrt{Ms}$.,se reporter également aux figures 1 à 4 pour l'observation de ces mêmes effets avant intégration.L'étude de ce

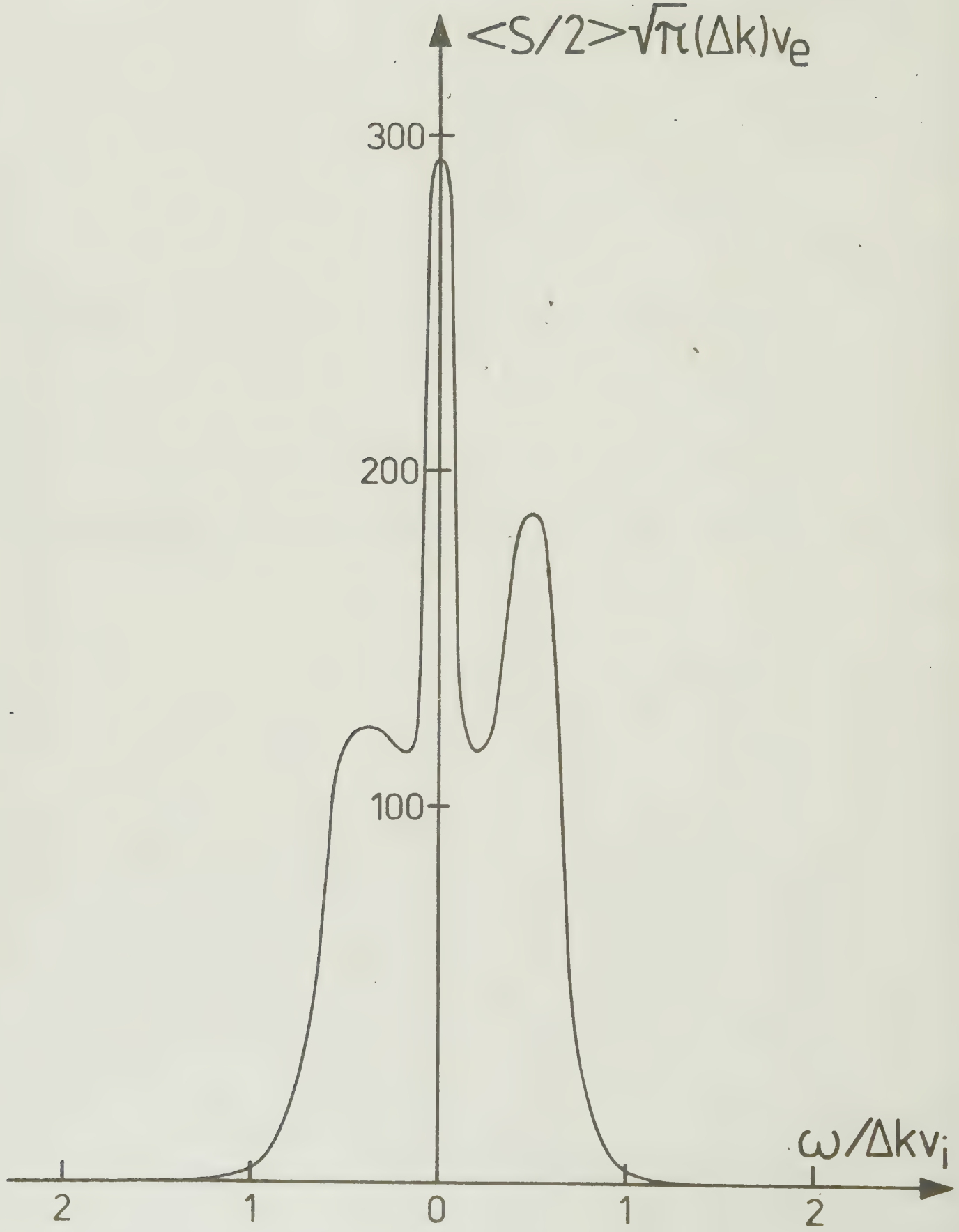


Figure 5 : Spectre acoustique ionique intégré de manière approchée plasma d'argon Te/Ti = 0, Δkvi = 10 MHz, Vde/Ve = 0.1.

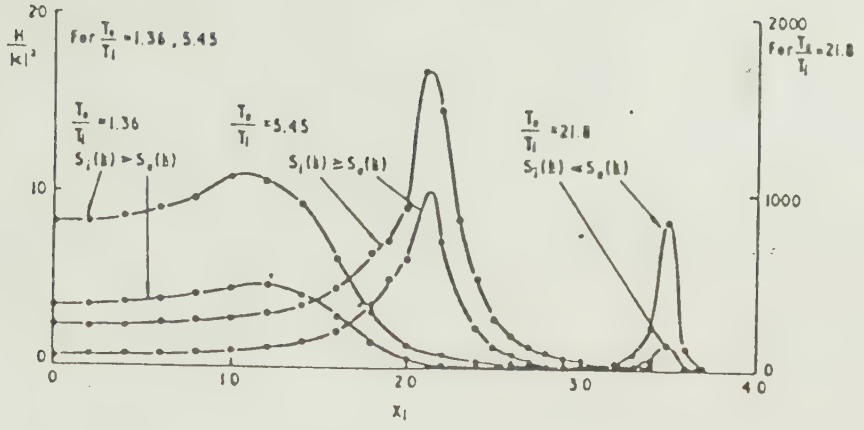


Figure 6 : en ordonnées $\left|\frac{X_{i,e}}{\varepsilon}\right|^2$, en abscisses $x_i = \frac{\omega}{k v_i}$

Contributions électroniques et ioniques à la résonance acoustique ionique lorsque $\frac{T_e}{T_i}$ varie (réf. 3).

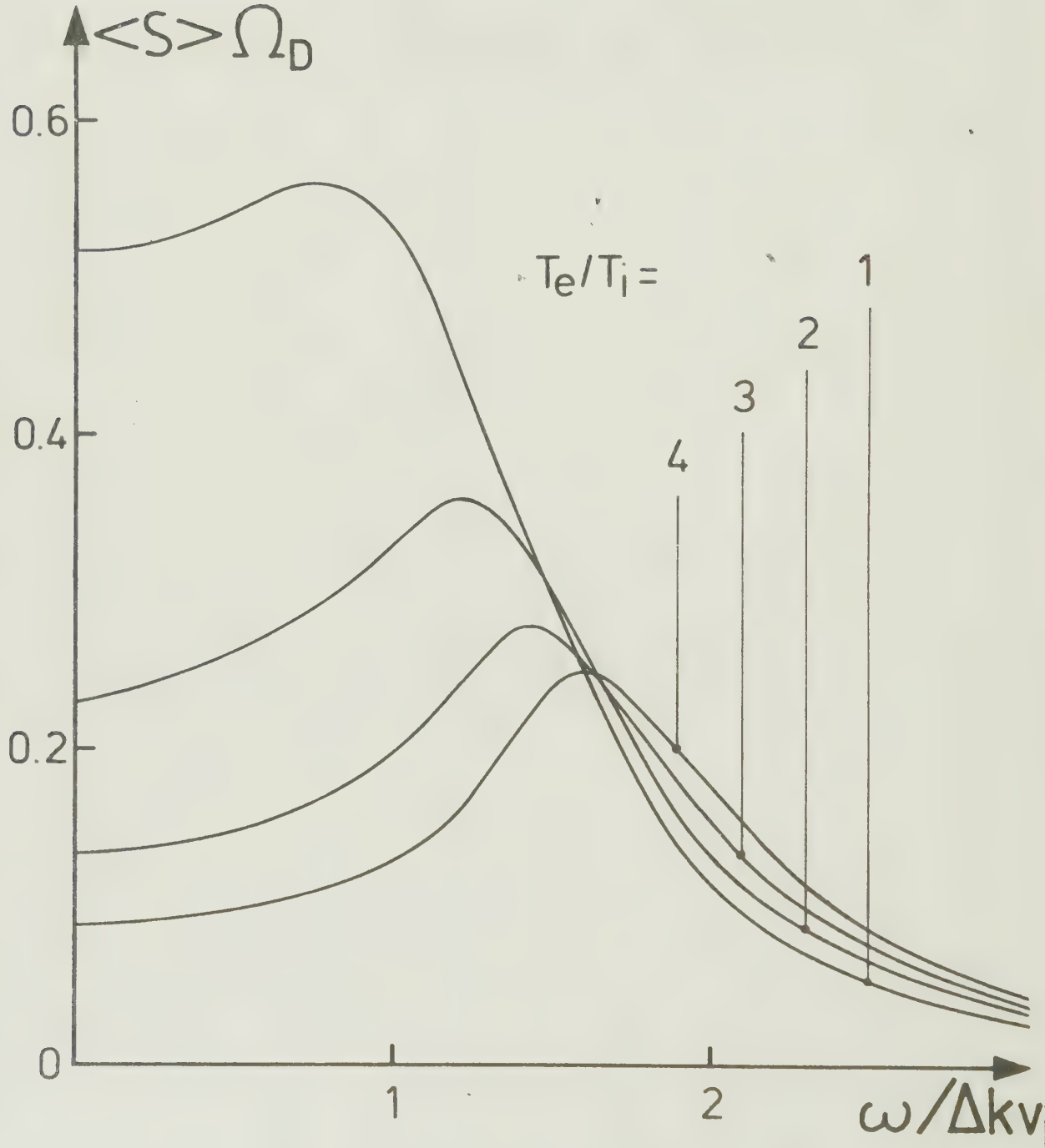
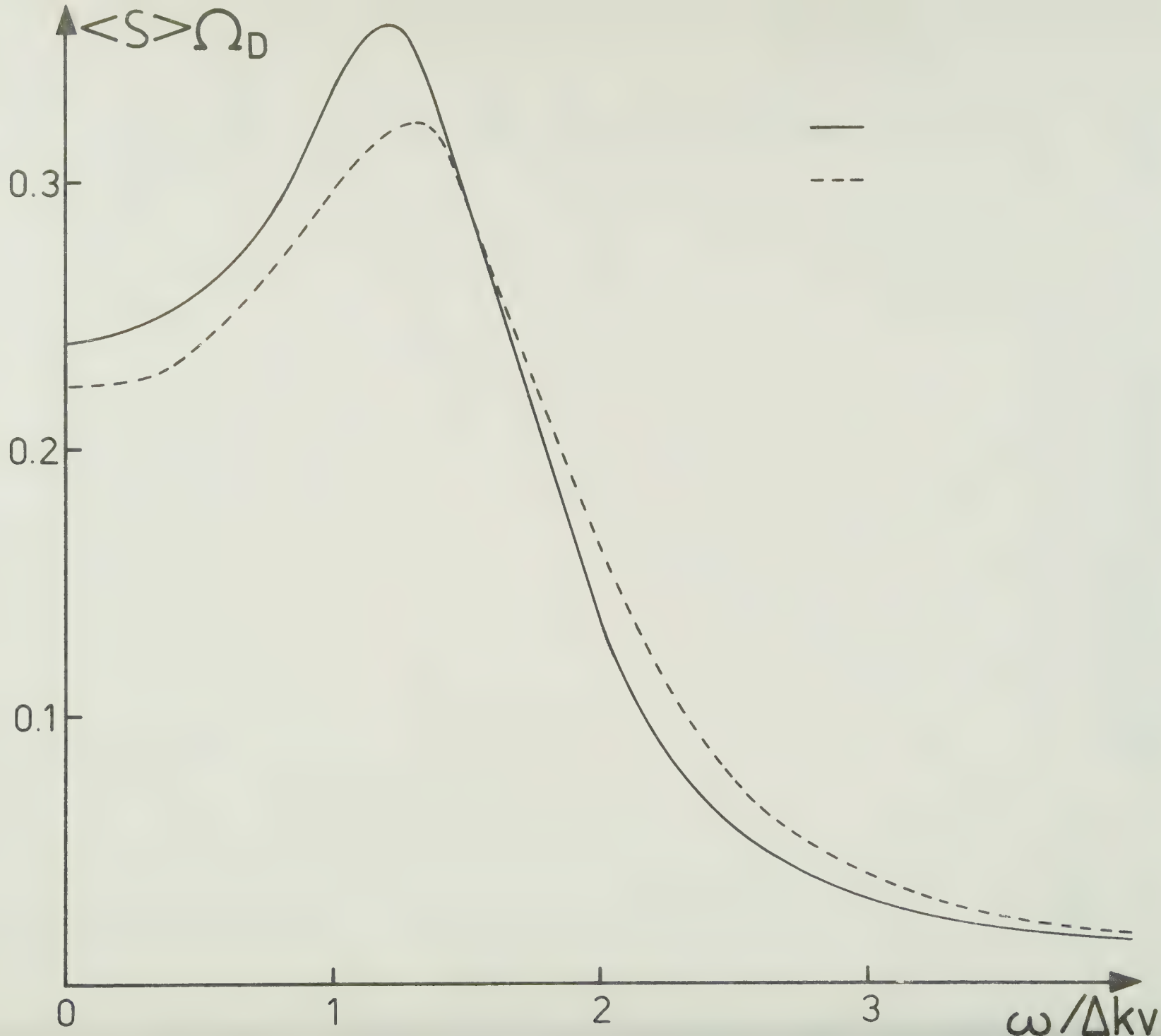


Figure 7 : Spectre acoustique ionique intégré sur les nombres d'onde par un plasma de Deutérium, $\Delta k/k = 1/2$, $\frac{V_{de}}{v_e} = 0$, les courbes 1,2,3,4 sont obtenues pour un rapport $\frac{T_e}{T_i}$ égal à 1,2,3,4.


$\langle S \rangle \Omega_D$
0.3
0.2
0.1
0
1
2
3
$\omega / \Delta k v_i$

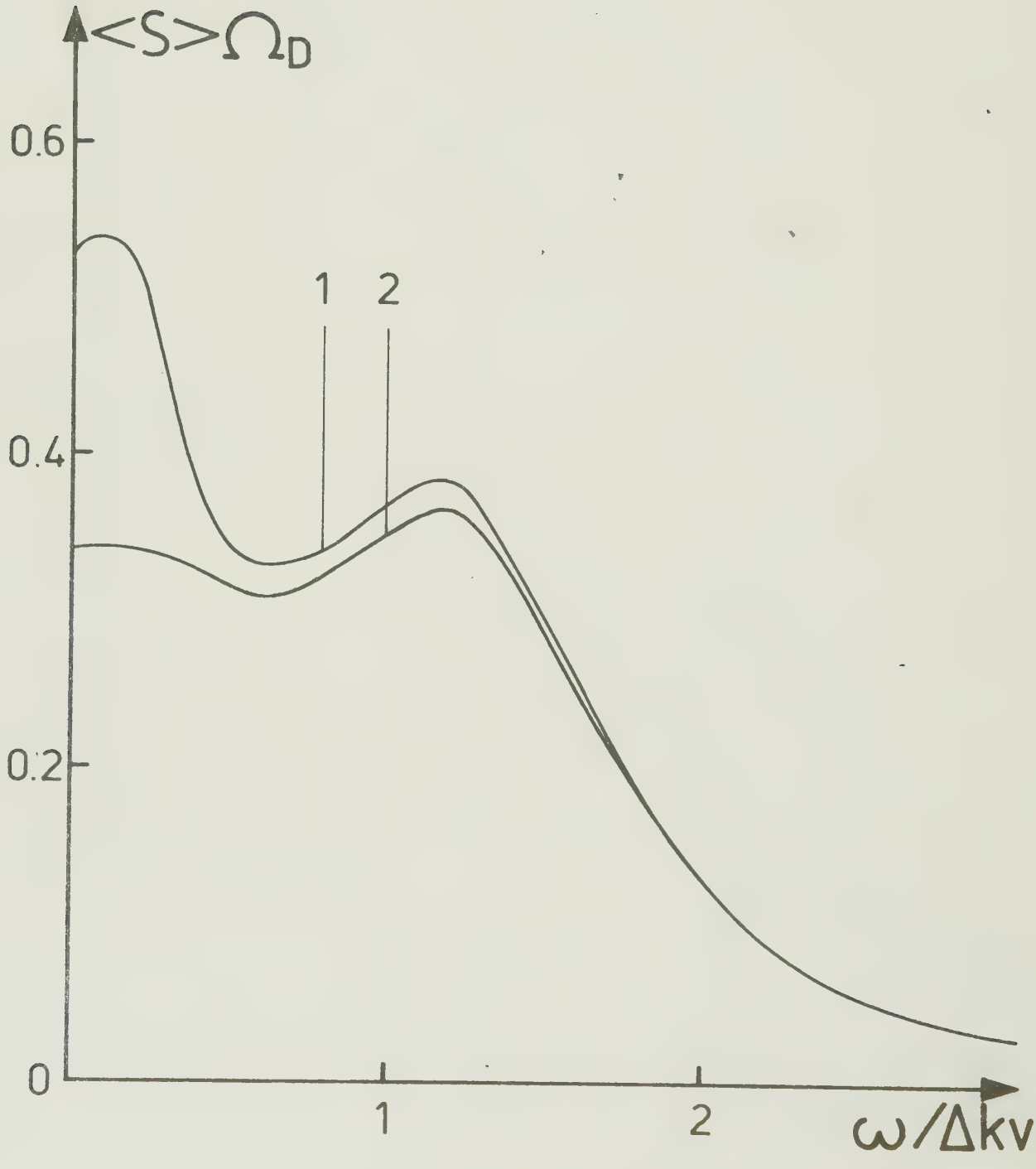


Figure 9 : Effets d'impuretés sur le spectre acoustique ionique
$\frac{Te}{Ti}$ = 2. Courbe 1 : 90 % D^+, 10 % O^{8+}
Courbe 2 : 90 % D^+, 6 % O^{7+}, 4 % Ni^{23+}

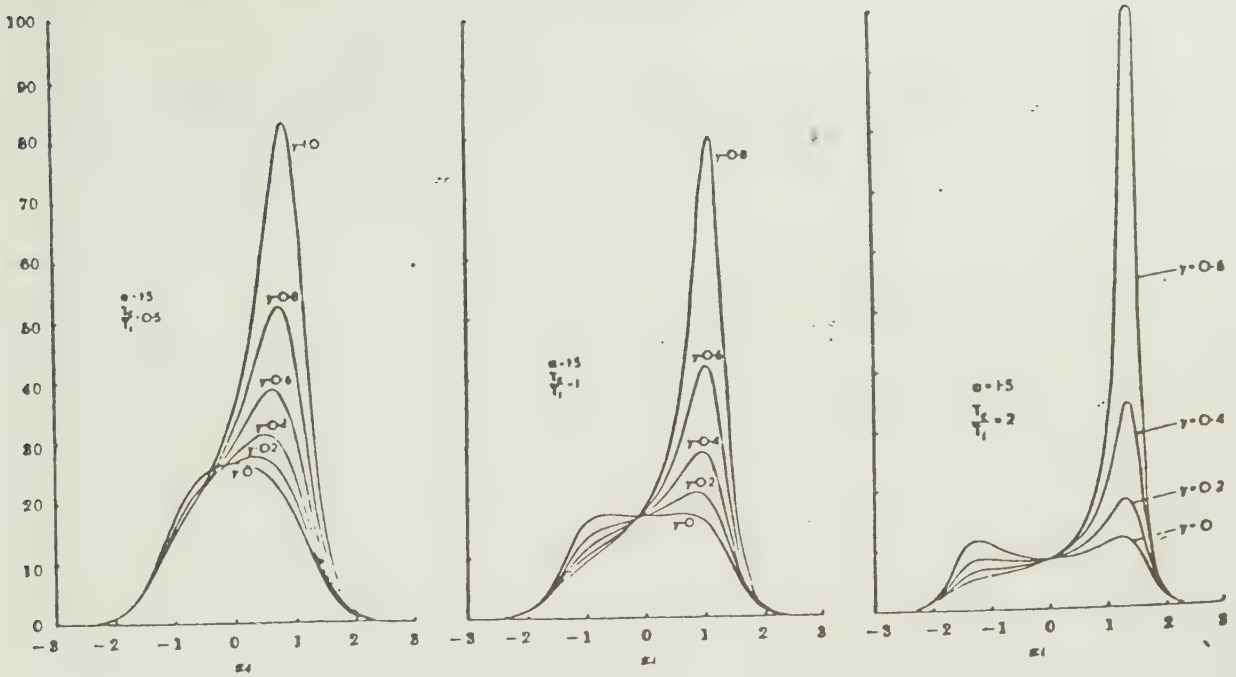


Fig. 3. Spectra calculated from theory (ref. 3) for $\alpha = 1.5$ and values of T_e/T_i and y as shown.

Figure 10 : en abscisses : $xi = \frac{\Delta\omega}{kvi}$

effet d'anisotropie si Vde ≠ 0

(réf 4)

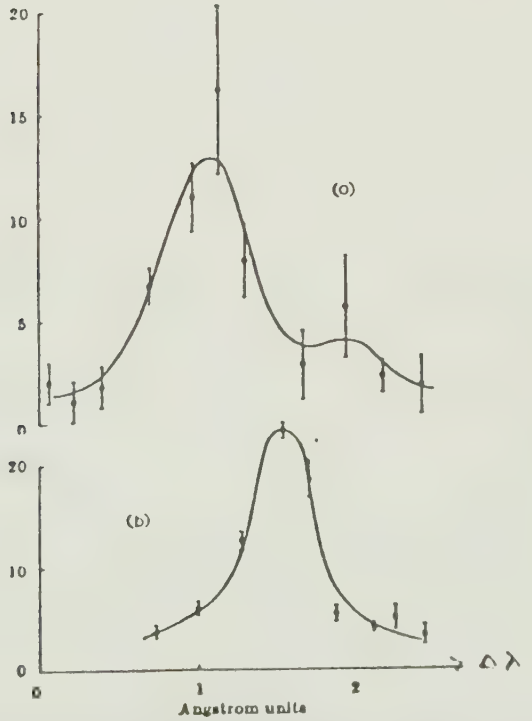


Fig. 1. *a*, Spectrum of scattered light from plasma. *b*, Spectrum of stray laser light. *a* is obtained by subtracting *b* from the total signal. Abscissa is common to both distributions. Errors shown are based on statistical fluctuations arising from averaging over several shots. Shift of resonance is 0·42 Å to the blue side of the laser line; measured width of resonance is 0·59 Å, width of laser line is 0·39 Å, giving true width of resonance 0·44 Å.

Figure 11 : Observation expérimentale de l'effet illustré sur la figure 10.

spectre basse fréquence en présence d'impuretés a d'ailleurs conduit Evans et Yeoman à donner une méthode pour mesurer la charge effective (5) (on en discute plus bas).

c) Influence d'une vitesse de dérive.

La figure 10 montre l'allure du spectre acoustique lorsqu'il existe une vitesse de dérive entre les électrons et les ions(on suppose que cette vitesse est parallèle au champ magnétique B).La forte anisotropie du facteur de forme par rapport à la fréquence de référence a conduit d'ailleurs à proposer cette observation pour estimer la vitesse de dérive.Cette anisotropie est dûe à ce que le mode (k,w) à une vitesse de phase opposée au mode (-k,w) d'où une interaction onde-particule qui se situe dans une classe de vitesse différente dans la fonction de distribution ,le taux d'échange d'energie est différent dans les deux cas.(ici l'un des mode possède un vecteur d'onde quasi-paralléle à la vitesse de dérive Vde,tandis que l'autre lui est anti-parallèle).La figure 1 de la référence 4 montre les spectres théorique et expérimental associé à cet effet,le dernier résultat ayant été obtenu dans un plasma de Thétatron.La figure 13 montre l'effet de Vde après intégration en k .

Illustration de l'anisotropie après intégration.en k.

La figure 12 montre la conservation de l'anisotropie même après une intégration en nombre d'onde, cette figure a été obtenue après une intégration numérique plus poussée.La prédiction d'un seuil d'instabilité pour le cas où Te/Ti $\underline{v}$1 est encore possible avec cette fois une vitesse de dérive d'autant plus importante que ce rapport de température est plus faible(voir l'annexe 1 et la courbe 25 prédisant le seuil d'instabilité).

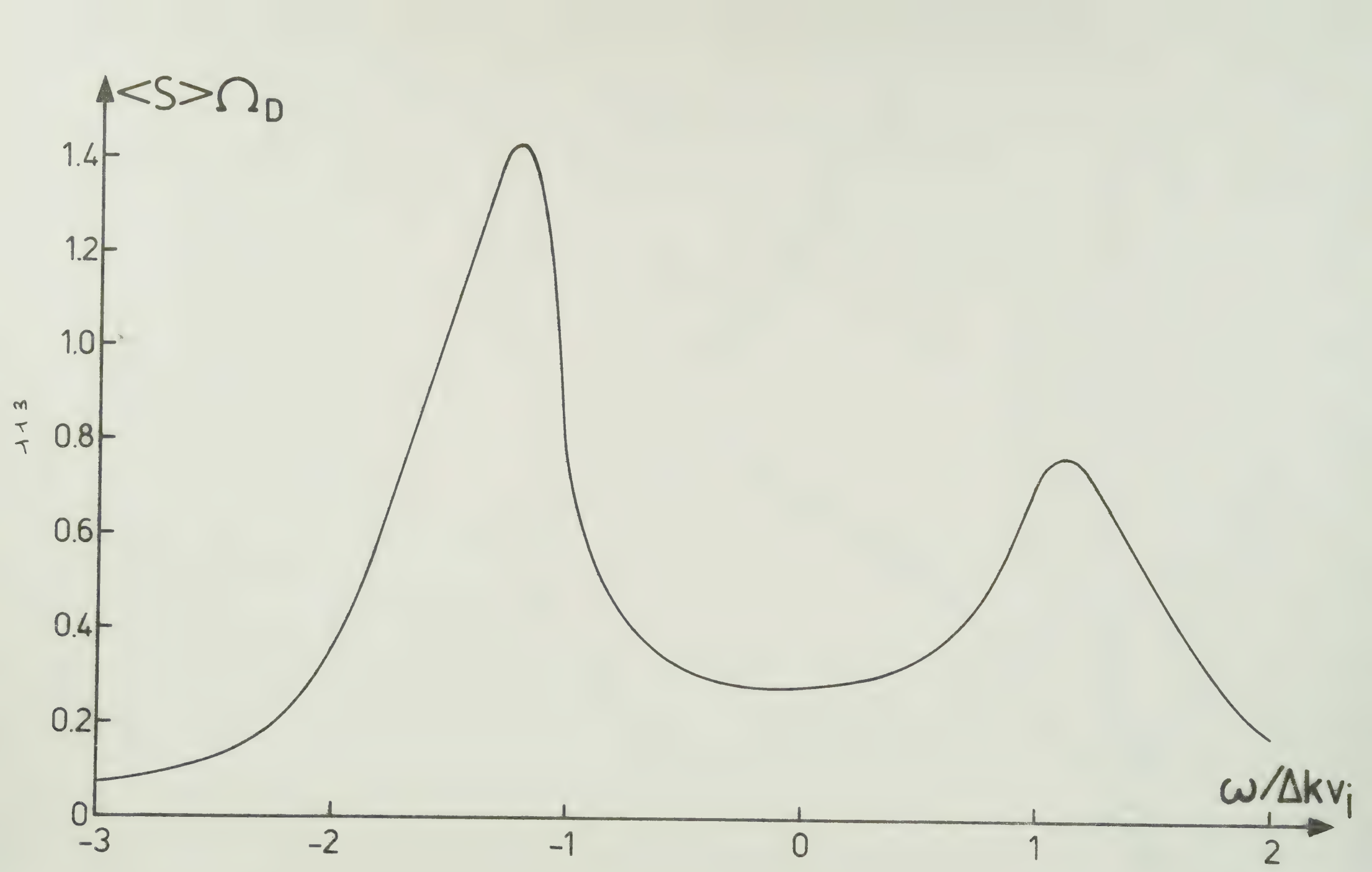


Figure 12 : Conservation de l'effet d'anisotropie après intégration entre $\Delta k/k = 1/2$, $\bar{v}de = 0.4$, $Te/Ti = 2$

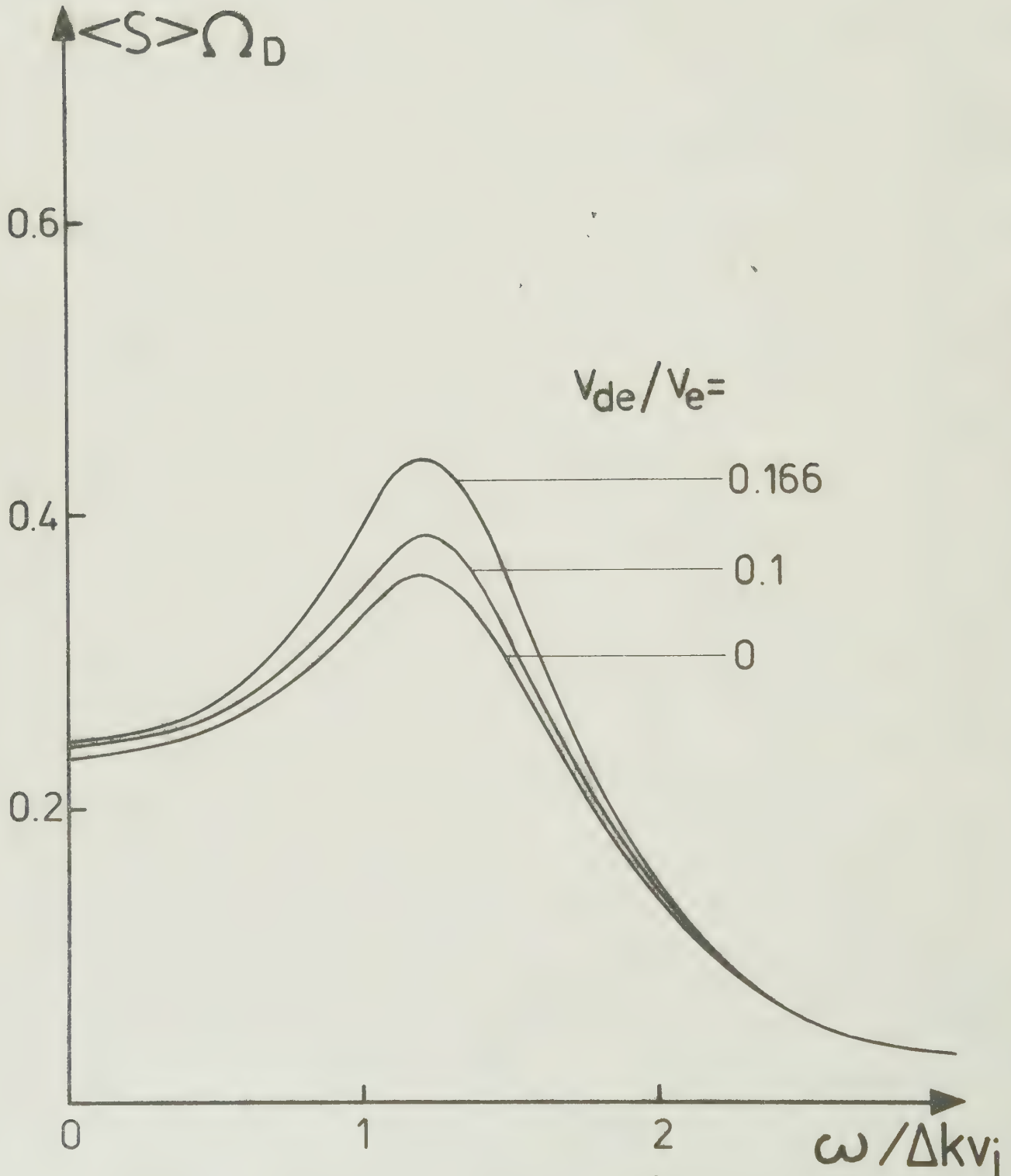


Figure 13 : Effet de la vitesse de dérive sur l'amplitude de la résonnance acoustique ionique. Mêmes conditions qu'à la figure 12 par ailleurs.

d)Mesure de la charge effective.

l'équipe TFR(réf1 du Cha I) utilise en général une méthode très indirecte pour évaluer la charge effective qui nécéssite l'utilisation d'autres mesures .Signalons la difficulté de l'estimation de $\bar{Z}$:si l'on utilise une formule de type Spitzer-Harm pour évaluer la conductivité du plasma,corrigée par la contribution des électrons piégés dans les bananes ,alors si la résistivité anormale n'est pas dûe aux impuretés on surestime $\bar{Z}$,tandis que s'il n'est plus justifié d'effectuer ces corrections néo-classiques pour évaluer la résistivité ,alors on sous-estim la valeur de $\bar{Z}$.

Cependant Evans(toujours lui) a proposé une méthode pour déterminer $\bar{Z}$ assez directement.L'idée se résume à observer le facteur de forme autour de la fréquence nulle (sans se préocupper de la résolution),étant alors donnée la relation: (4)

$$S(\alpha,\omega\simeq 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\left\{ e^{-\left(\frac{\omega_{pe}}{\nu_{ei}}\right)^2 \alpha^2 \theta_B} \frac{v_{i0}}{v_e}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{T_e}{T_i}\bar{Z}\right)^2 + \Gamma \right\}}{\nu_{ei}\,\theta_B\,\left(1+1/\alpha^2+\frac{T_e}{T_i}\bar{Z}\right)^2} \quad (4)$$

où cette formule a été obtenue en supposant les ions non-magnétisés ce qui rendrait le facteur Γ indépendant de α,il suffirait d'éliminer Γen réalisant deux visées pour deux valeurs distinctes de α pour remonter à la valeur de la charge effective (nous critiquons cette méthode à l'annexe 2,car notre sentiment est qu'il n'y a pas lieu de négliger la magnétisation des ions dans ce problème).

2) Application au spectre cyclotronique ionique.

-cas d'un mélange de gaz.

On peut étudier le cas de mélange de gaz dans des proportions arbitraires relatives.On se spécialise ici au cas d'un mélange Deutérium-Hydrogène car il est très utilisé en ce moment.

La dépendance en fréquence de S(k,w) peut alors être prédite exactement comme dans le cas d'un plasma à un seul ion:on résoud numériquement la relation de dispersion approchée donnée au chapitre III,puis on tient compte des corrections de dispersion complète et de courbure dans l'intégration.Les premières corrections provoquent un décalage des pics vers les hautes fréquences et les secondes ramènent leurs fréquences à des valeurs plus basses et finalement assez proches de celles que fournit la dispersion approchée pout un rapport nh/nd arbitraire.

Les figures 14 à 16 représentent l'évolution du facteur de forme lorsque,pour Te/Ti=2,on a un pourcentage nh/nd égal à zéro , un et à l'infini.Au fur et à mesure que ce rapport nh/nd augmente ,les résonnances associées à l'hydrogène s'accroissent aux dépends de celles liées au deutérium ,ce qui se traduit ici par l'augmentation des pics à fréquence double des fréquences cyclotroniques du deutérium.On a rejeté en annexe,à titre d'abaques le cas d'un mélange deutérium-hydrogène à pourcentage variable et pour différents rapports de température.(fig 17 à 20)

Impuretés légères et lourdes.

Il est nécessaire de considérer les impuretés puisque leur influence peut être très néfaste ,comme on l'a vu,sur le spectre acoustique ionique.On illustre l'effet des impuretés légères sur la figure 21;à la courbe 1 en utilisant le mélange D+-O7+ (les fréquences cyclotroniques des deux espèces sont alors très voisines).On constate l'apparition de résonances associées à l'oxygène mais sans déformation des pics de l'espèce principale.(le cas O8+ entraine un léger décalage des picsde D+ qui est du à une charge effective supérieure à l'unité,voir l'annexe 3).Dans le cas des impuretés lourdes il existe une légère correction sur la détermination de Te/Ti due également à une charge effective supérieure à l'unité (estimation de cette cor-

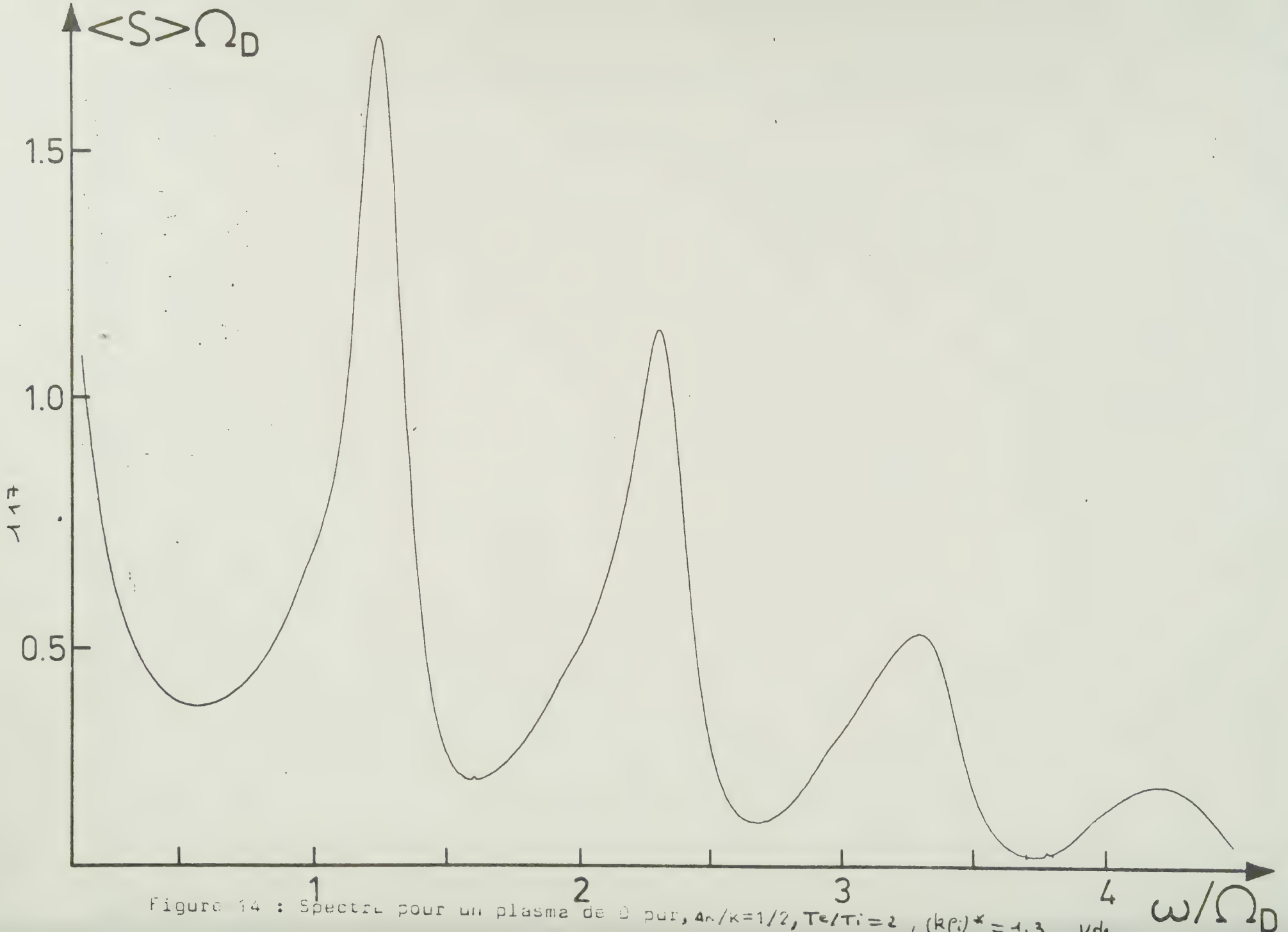


Figure 14 : Spectre pour un plasma de D pur, $\Delta n/n = 1/2$, $T_e/T_i = 2$, $(k\rho_i)^2 = 1.3$, v_d

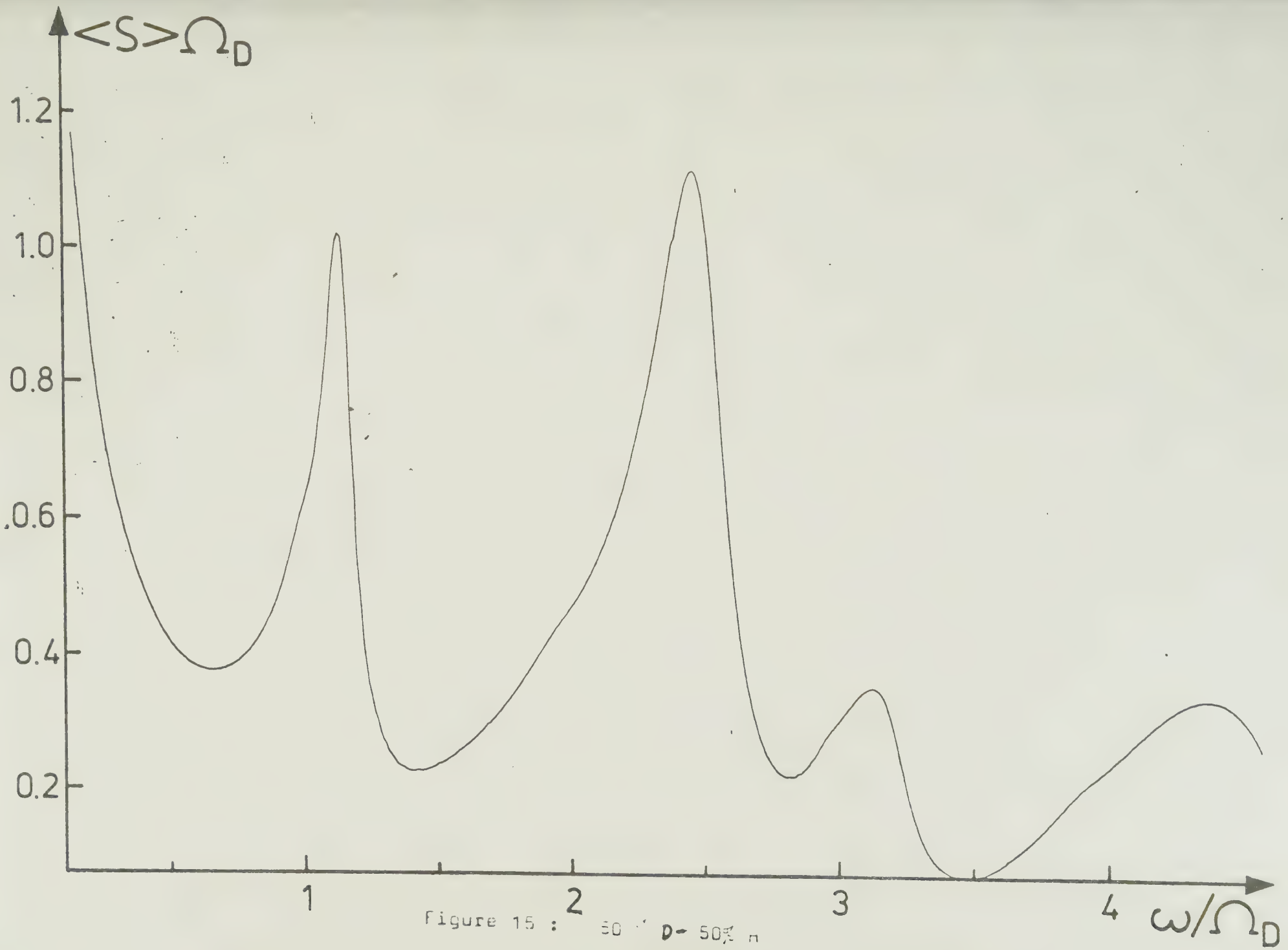
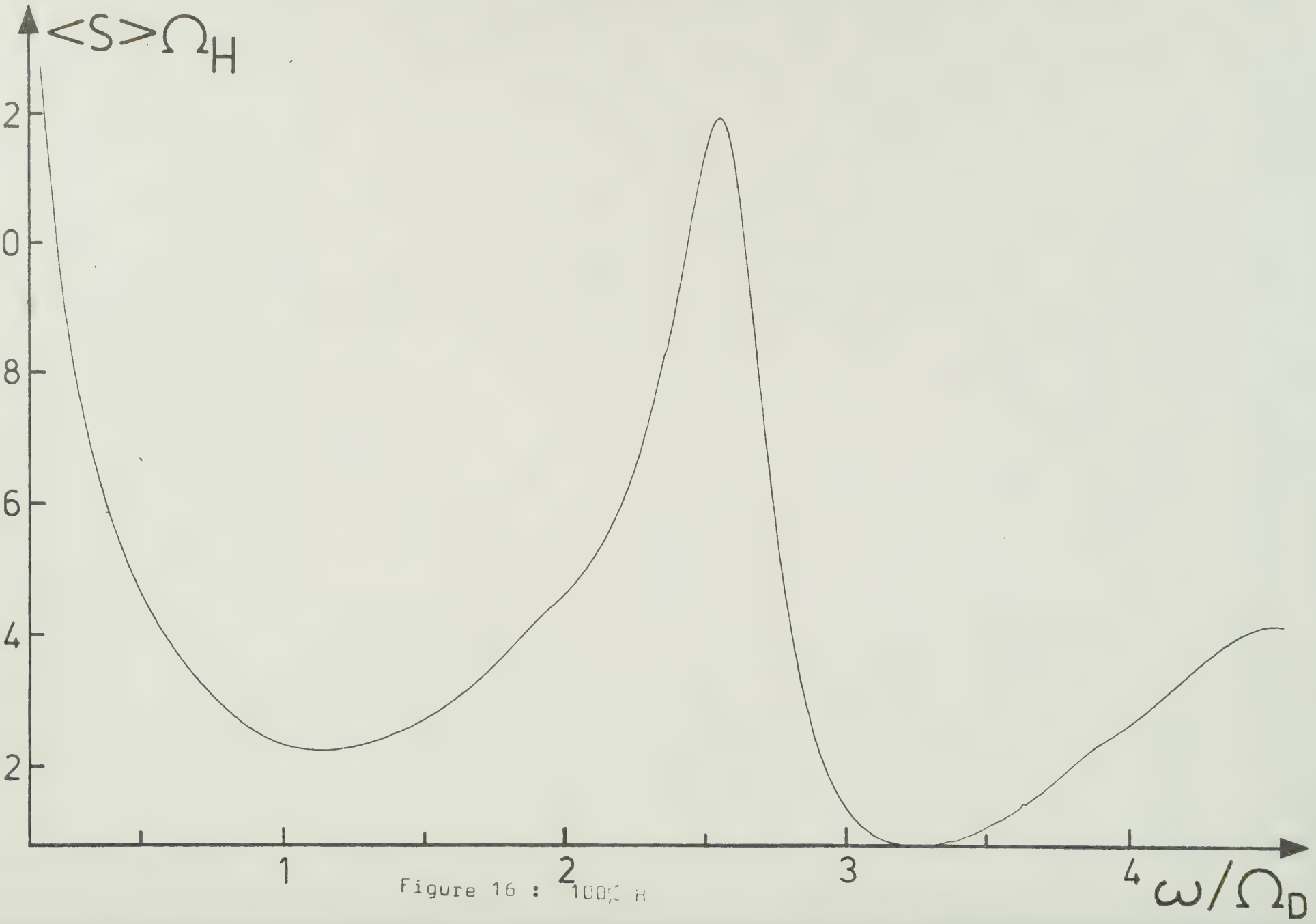


Figure 15 : [illegible] D= 50% n



119

Figure 16 : 100% H

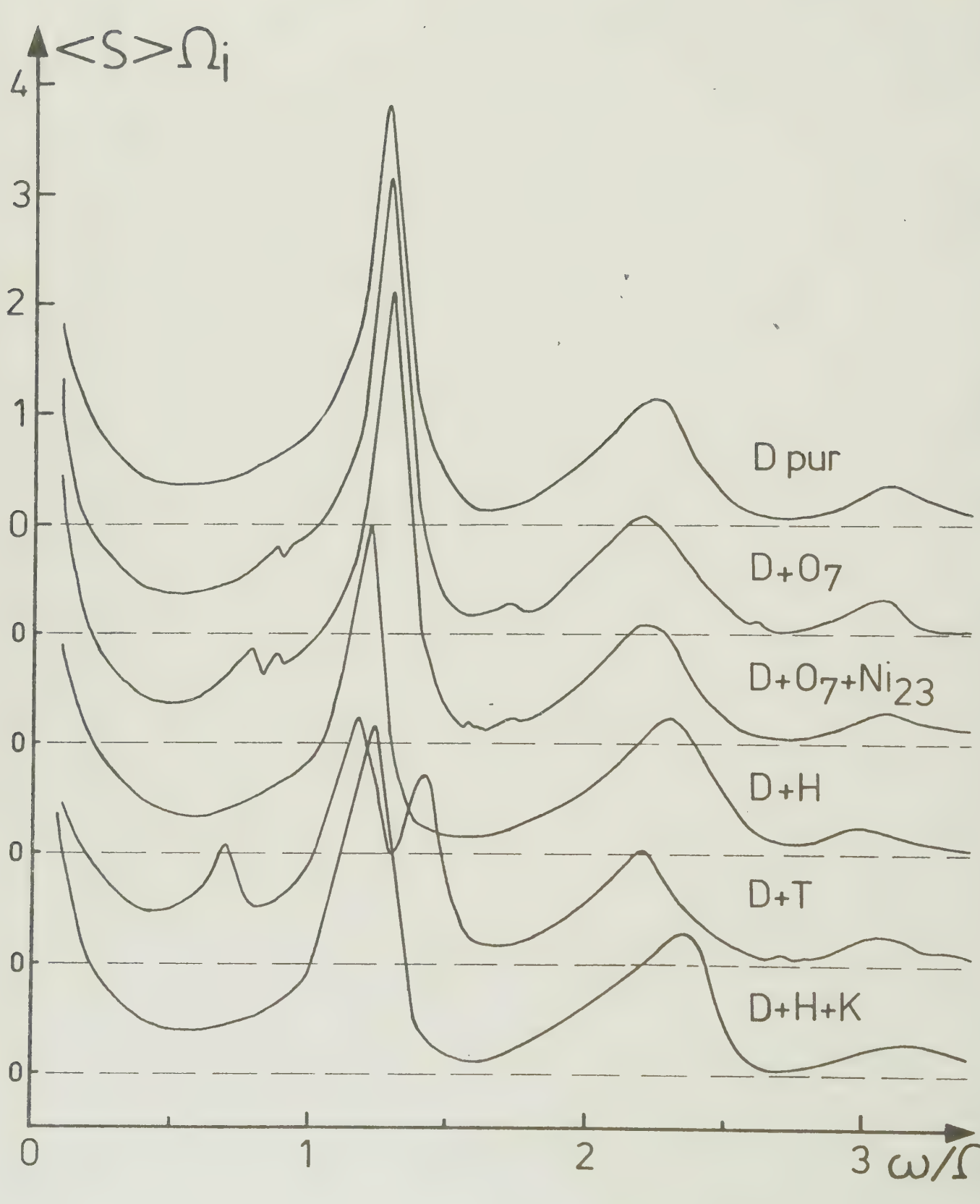


Figure 21 : Spectre intégré en présence d'impuretés légères et lourdes.
Te/Ti = 2, Δk/k = 1/3, (kp)* = 1.3.
Courbe 2 : D^+ 90 %, O^{7+} 10 %. Courbe 3 : O^+ 90 %, O^{7+} 6%, Ni^{23+} 4%
Courbe 4 : D^+ 80 %, H^+ 20 %, Courbe 5 : O^+ 70 %, T^+ 30 %.
Courbe 6 : D^+ 90 %, H^+ 6 %, K^{19+} 4 %.

rections toujours à l'annexe3).La série de la figure 21 montre clairement la non-déformation du spectre en présence des impuretés,il apparaît cependant les résonances cyclotroniques correspondantes à ces impuretés.Ceci constitue un facteur très favorable par rapport aus cas des fluctuations ayant kparallèle à B.

Influence d'une vitesse de dérive.

Cet effet est intéressant à plus d'un titre.En présence de courant parallèle au champ magnétique toroidal,les ondes cyclotroniques peuvent être excitées,voire rendues instables ce qui va conduire à une augmentation importante des maximas de S.

La largeur des extrêmas sera affectée par cet effet destabilisant la hauteur des pics augmente et leur largeur se réduit dans le même temps.Cependant le spectre total intégré sur les fréquences ne reste pas constant et il augmente avec la vitesse de dérive, celle-ci nécéssitant un apport d'energie extérieur au système.

On peut attendre aussi un effet de dissymétrie du spectre par rapport à la fréquence nulle pour une vitesse de dérive non nulle: les modes (w,k) et (w,-k) ne sont pas équivalents notamment quant à leur amortissement.Cependant après intégration en nombre d'onde à cause de la largeur en k de la mesure on observe un spectre(fig24) pratiquement symétrique .C'est l'effet contraire qui se produisait pour le spectre acoustique qui était fortement anisotrope en fréquence par rapport à la fréquence nulle.La figure 22 montre l'effet d'une vitesse de dérive pour un plasma de Deutérium pur,figure que l'on comparera à la figure 13 de ce chapitre.

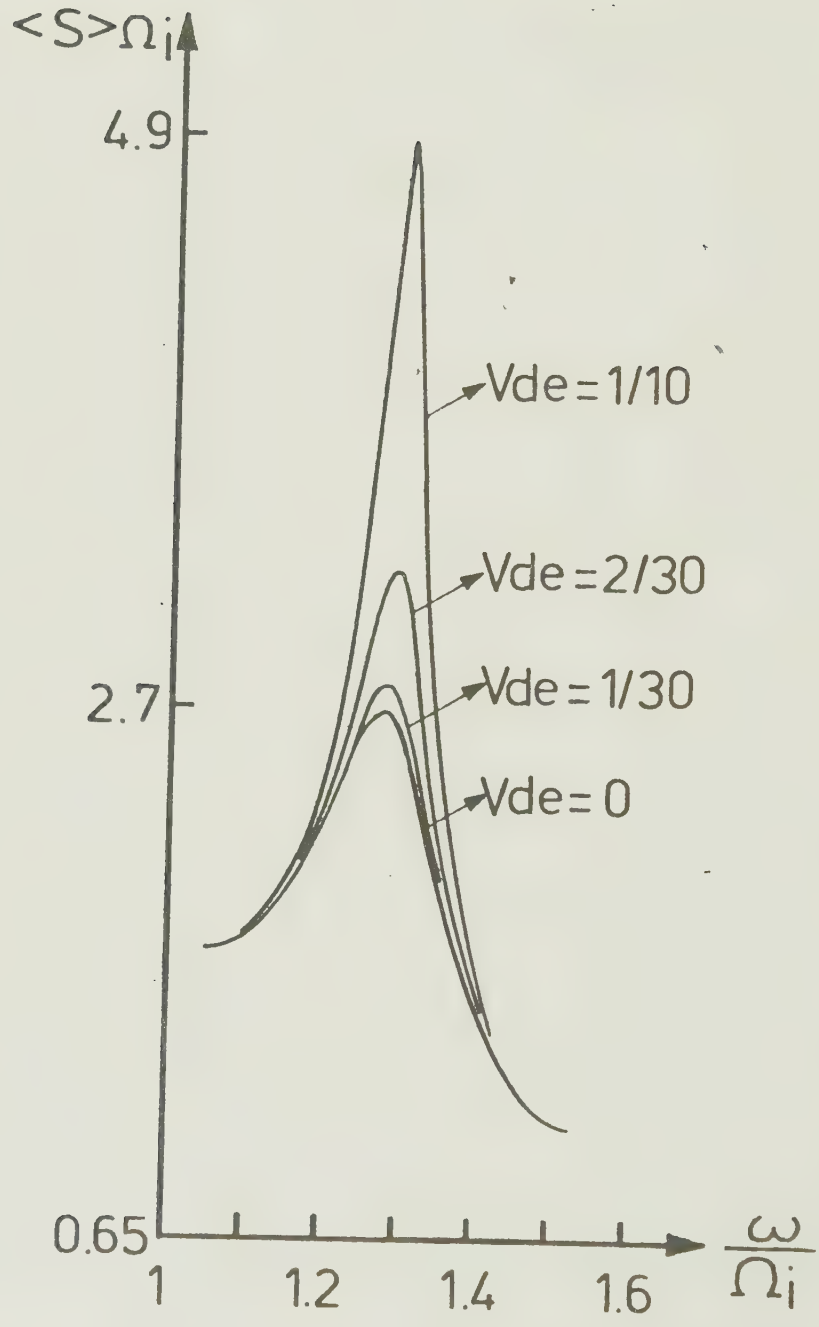


Figure 22 : Effet d'une vitesse de dérive sur l'amplitude du premier extrêma du spectre cyclotronique ionique.
(Δk/k=1/3, Te/Ti=2, D pur)

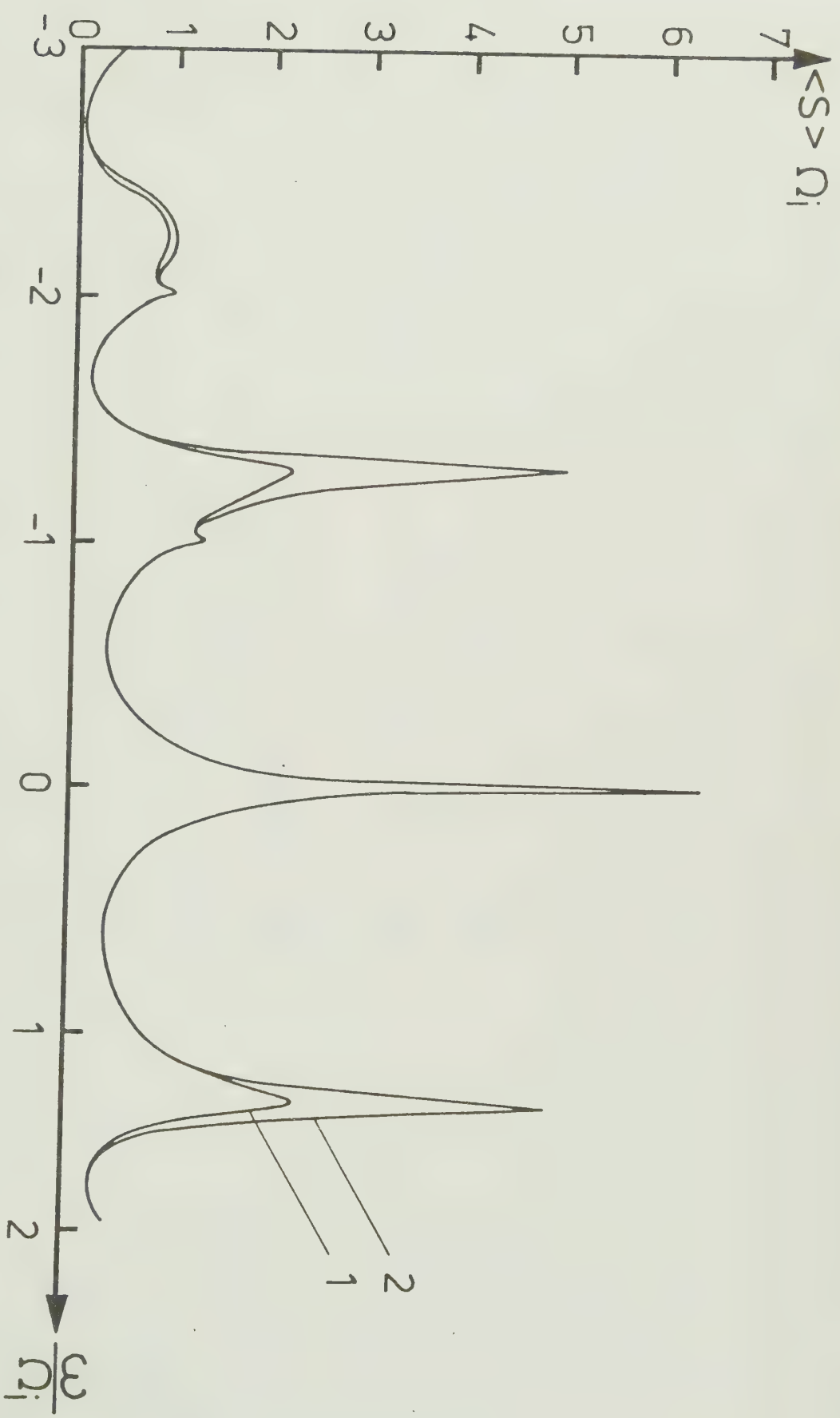


Figure 24 : Figure illustrant la symétrie du spectre intégré en k, les courbes 1 et 2 sont obtenues pour Vde/Ve=0, 0.1 (D pur, Te/Ti=2, Δk/k=1/2).

Dans le cas d'une vitesse de dérive non-nulle ,au voisinage d'une résonance w(k) le facteur de forme est :

$$S \propto \frac{1}{[\mathrm{Im}\,\varepsilon(k,\omega)]^2} \qquad (2)$$

Plus précisément une valeur approchée autour d'un maxima (ω^*,k^*) est donnée par:

$$S(k_{//}^*, k_\perp^*, \omega) = S(V_{de}=0) \frac{1}{\left(1 - \frac{V_{de}}{V_e}\left(\frac{\omega - n\Omega_s}{\omega}\right)^2 \frac{\varepsilon \chi_{ns}^2 - 1}{2\chi_{ns}^2}\right)^2} \qquad (3)$$

$$\chi_{ns} = (\omega - n\Omega_s)/(k_{//}V_s)$$

Donc si la vitesse de dérive augmente,les ondes peuvent devenir instables et S(k,w) peut augmenter énormément jusqu'à l'équivalent de l'opalescence critique pour lequel S devient infini,et naturellement la théorie cinétique des plasmas stables cesse de décrire correctement les fluctuations lorsque Vde atteint le seuil d'instabilité,ce dernier est donné par:

$$\frac{V_{de}^*}{V_e} = \frac{V_s}{V_e} \frac{\omega}{\omega - n\Omega_s} \frac{2\chi_{ns}^3}{2\chi_{ns}^2 - 1} = \frac{V_s}{V_e} \frac{\omega}{k_{//}} \left(1 + \frac{1}{2\chi_{ns}^2 - 1}\right) \qquad (4)$$

La figure 23 représente V_{de}^*/V_e en fonction de Te/Ti pour $k_{//}=k_{//}^*$ valeur de k// qui minimise l'amortissement;cette courbe sera utile pour prédire le taux d'excitation des ondes en présence d'un courant parallèle à B.Une étude annexe numérique permet de s'assurer que ce seuil est correctement décrit par la formule 4 .

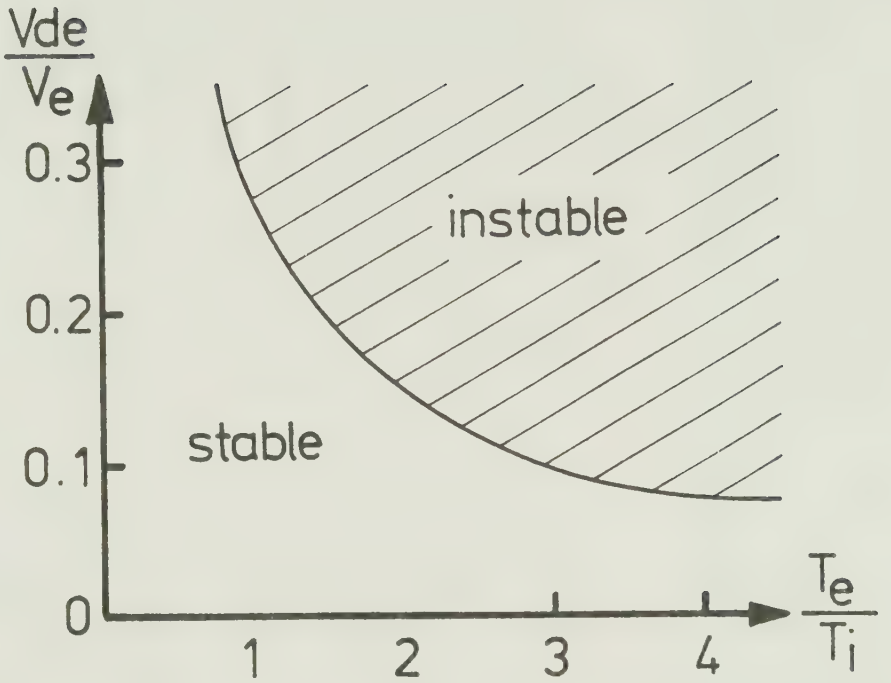


Figure 23 : Seuil d'instabilité pour les ondes cyclotroniques ioniques en présence d'un courant parallèle au champ magnétique.

L'allure de la courbe ci-dessus présentée a déjà été obtenue par Kindel et Kennel (6) et le seuil critique calculé depuis longtemps par Drummond et Rosenbluth (7), et a été confirmé expérimentalement en de très nombreuses occasions (voir les références du chapitre V, et les références n° 8 à 8d), notamment par l'observation de l'amortissement et de la vitesse de dérive en fonction de la longueur d'onde parallèle pour la première harmonique cyclotronique par Corell, Rynn et Böhmer (8).

Le mécanisme de couplage qui permet le transfert d'énergie d'un électron dérivant aux ions via les modes cyclotroniques, à des fins de chauffage n'est pas bien compris et a suscité de nombreuses études (voir les références du chapitre V et la référence 10 du présent chapitre), voir également un peu plus bas.

3) Observation du spectre cyclotronique ionique dans les plasmas de laboratoire.

Après avoir passé en revue très brièvement quelques processus pouvant conduire à l'excitation d'ondes de Bernstein, on rappelle que ce spectre a été observé dans le cas de l'excitation des ondes par des faisceaux de particules.

Processus conduisant à l'excitation d'ondes de Bernstein.

Il existe de nombreux processus dans les plasmas de fusion qui sont susceptibles de conduire à la création d'ondes de Bernstein ioniques et donc de faciliter l'observation du spectre de fluctuations associé à celles-ci.

L'ensemble de ces processus n'est pas "naturel " mais "forcé" dans le plasma à des fins de chauffage de celui-ci par absorption cyclotronique notamment. A ce titre les ondes de Bernstein ont suscité un interêt considérable pour réaliser un chauffage additionnel du plasma.

C'est ainsi que l'on a d'abord suggéré le chauffage des ions par l'instabilité cyclotronique ionique engendrée par une dérive des électrons par rapport aux ions dûe à un courant parallèle au champ magnétique(voir la référence n°10 par ex),puis plus récemment le chauffage utilisant des ondes de Bernstein :soit en les faisant entrer directement dans le plasma (voir par exemple la référence n°11)soit en utilisant la conversion de mode d'une onde électromagnétique(très souvent extraordinaire) en une onde électrostatique.

D'autre part des instabilités paramétriques peuvent conduire dans de très nombreux cas de figures à la génération d'ondes de Bern-stein ioniques(voir par exemple les réf n° 12 à n° 14).

Enfin le chauffage additionnel par injection de particules neutres (ou chargées) sous forme de faisceaux permet suivant l'angle d'injection de ce faisceau et de la valeur de ses compo santes de vitesses parallèle et perpendiculaire au champ magnétique de générer des ondes cyclotroniques ioniques (voir les réf n°15 à n°20).Il semble d'ailleurs que le spectre que nous avons calculé ait été effectivement observé au moins dans deux expérien ces à notre connaissance.

Précisons bien qu'il ne s'agit plus de fluctuations thermiques mais du cas d'un spectre d'excitation qui a néanmoins même allure

Dans la première expérience on injectait dans une machine Q, un faisceau d'ion Césium dans un plasma de Césium et on a identifié les modes en mesurant leur dispersion.Si on se reporte à (réf n°17) la figure 26,on voit que les fréquences des extrémas sont respectivement :

$$\frac{f_{ci,1}^{*}}{f_{ci}} \simeq 1.20 \qquad \frac{f_{ci,2}^{*}}{f_{ci}} = 2.12 \qquad \frac{f_{ci,3}^{*}}{f_{ci}} = 3.15$$

ce qui est tout à fait nos valeurs théoriques pout Te/Ti =1 comme il est reporté dans l'expérience.Pour de faibles densités du faisceau la dispersion ,est la dispersion usuelle(réf n°18). le fait que l'on excite nos ondes est dû au fait que lors de l'injection du faisceau on donne à celui-ci une petite composante de vitesse perpendiculaire au champ magnétique(réf n°18). Dans la seconde expérience(réf n°16),il s'agit cette fois d'un faisceau d'helium une fois chargé injecté le long du champ magnétique d'une colonne de plasma et possédent une legère composante de vitesse perpendiculaire au champ magnétique dans le domaine: $c_s < V_{\perp,f} \ll V_e \qquad (\vec{V}_{\perp,f})$

il existe alors des ondes cyclotroniques ioniques qui se propagent avec une vitesse de phase égale à $\vec{V}_{\perp,f}$.L'accord est plus qualitatif cette fois comme le montre la figure n°27 ,mais la forme du spectre est tout à fait celle attendue.

La figure 28 tirée de la réf (20) montre le seuil d'instabilité des ondes cyclotroniques dans un cas particulier et pour des caractéristiques d'un faisceau injecté parallèlement au champ magnétique.La croissance des modes se fait par effet Landau inverse aux dépends de l'energie parallèle du faisceau

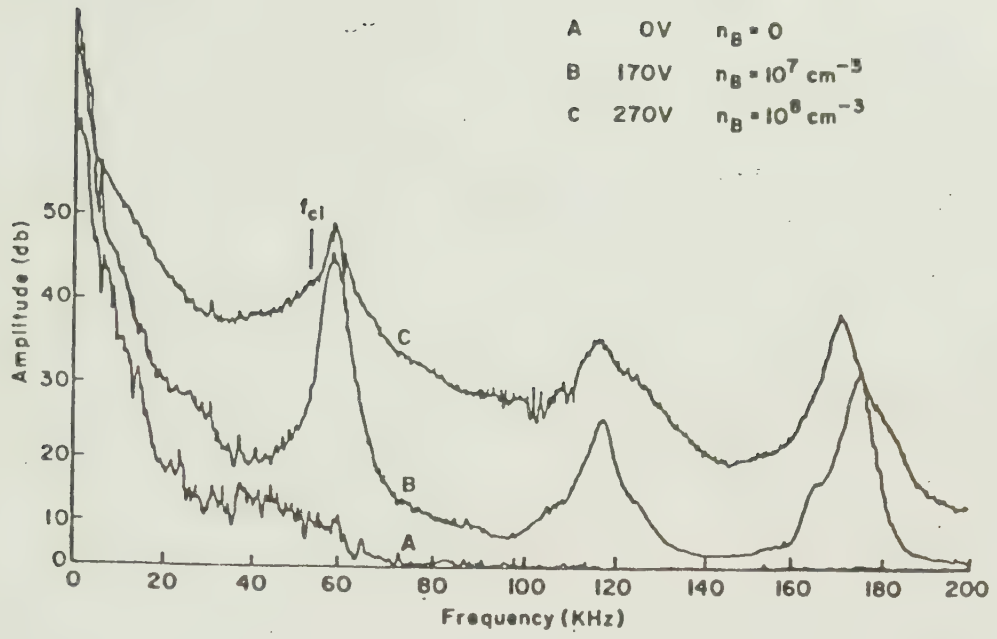


Figure 26 : Spectre en fréquence des modes mesurées par une sonde ionique.

Conditions : B = 4.65 kG, np = 4.10^8 cm^{-3}, nf = 10^8 cm^{-3}, la résolution est de 3kHz.

(réf 17)

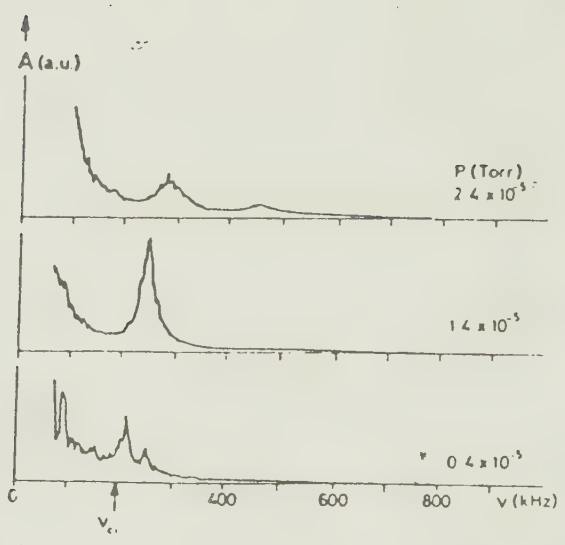


Figure 27 : Spectre en fréquence pour l'instabilité cyclotronique ionique en fonction de la pression du gaz.
Conditions : B = 510 G.

(réf 16)

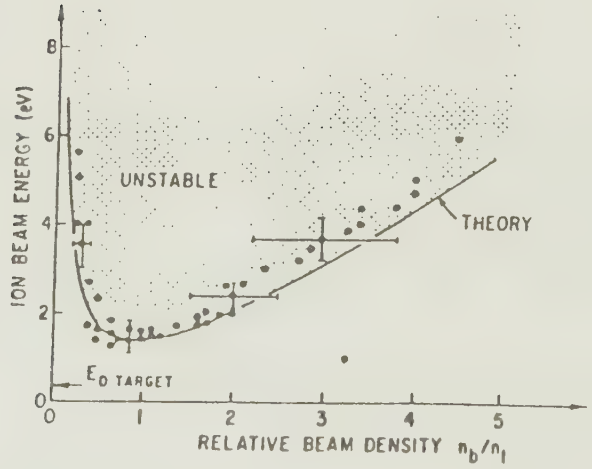


Figure 28 : Seuil de stabilité pour l'énergie du faisceau d'ion en fonction de la densité relative du faisceau. (réf 20)
La courbe en trait plein a été calculée au seuil pour $k_I p_i = 1.7$ mesuré
$|(\omega - k_{//} V_f)/k_{//} V_{f//}| \simeq 0.5 - 3.1$.

Conclusion de ce chapitre:

On a vu ici l'influence de deux effets au moins qui sont essentiels puisqu'il s'agit de la vitesse de dérive susceptible de destabiliser les ondes cyclotroniques ou en tout cas de les exciter au dessus du niveau thermique ,ce qui ne peut que faciliter leur observation.L'autre facteur à priori défavorable concerne les impuretés,on a vu que ce "souci" pouvait être oublié ,ce qui est très encourageant.

Annexe 1 du chapitre IV.

Relation de dispersion dans le cas de la propagation parallèle au champ magnétique.

Dispersion.

La relation de dispersion dans ce cas est simplement celle que l'on obtient en champ nul: on retrouve ainsi:

$$\mathcal{R}e\,\varepsilon = 0 \qquad \mathcal{R}e\,\varepsilon = 1 + \sum_{s=e,i} \frac{k_\perp^2 \rho_s^2}{k^2} \left(1 + Z(\zeta_{os})\zeta_{os}\right) I_0(\Lambda_s) e^{-\Lambda_s}$$

$$k_\perp \ll k_\parallel \simeq k \qquad \Lambda_s = \frac{1}{2}(k_\perp \rho_s)^2 \to 0 \qquad \zeta_{os} = \frac{\omega - k_\parallel v_{ds}}{k_\parallel v_s} \qquad \Omega_s = \frac{v_s}{\rho_s}$$

les modes acoustiques ioniques correspondent à :

$$\begin{cases} v_i \ll \dfrac{\omega}{k_\parallel} \ll v_e \\ k_\perp \ll k_i \end{cases}$$

soit $k_\perp / k_\parallel \ll \dfrac{1}{k\rho_i}$ et $\Lambda_e = \Lambda_i = 0$ $\quad \zeta_{oe} \ll 1$ $\quad \zeta_{oi} \gg 1$

On effectue un developpement autour de zéro de $Z'(\zeta_{oe})$ et un developpement asymptotique de $Z'(\zeta_{oi})$:

$$\varepsilon = 1 + H_e + \sum_i H_i \qquad H_i = \frac{k_{di}^2}{k^2}\left(-\frac{1}{2\left(\frac{\omega}{k_\parallel v_i}\right)^2} + i\sqrt{\pi}\,\frac{\omega}{k_\parallel v_i}\, e^{-\left(\frac{\omega}{k_\parallel v_i}\right)^2}\right)$$

$$H_e = \frac{k_{de}^2}{k^2}\left(1 - 2\zeta_{oe}^2 + i\sqrt{\pi}\,\frac{\omega - k_\parallel v_{de}}{k_\parallel v_e}\, e^{-\left(\frac{\omega - k_\parallel v_{de}}{k_\parallel v_e}\right)^2}\right)$$

$\mathcal{R}e\,\varepsilon = 0$ donne : $\omega \simeq k_\parallel c_s$, si $k \ll k_d$ $\qquad c_s = \sqrt{\frac{kT_e}{m_i} + 3\frac{kT_{io}}{m_{io}}} \times A$

$$A = \left[\frac{n_{io}}{n_e} Z_{io}^2 \left(1 + \sum_{s \neq io} \frac{Z_s^2}{Z_{io}^2} \frac{n_s}{n_{io}} \frac{T_s}{T_{io}} \frac{m_{io}}{m_s}\right)\right]^{1/2}$$

Seuil d'instabilité.

Les modes acoustiques sont fortement amortis par effet Landau sur les ions lorsque Te/Ti $\underline{\vee}$ 1 ou inférieur. Ces modes ne sont alors des excitations bien définies que s'il existe une vitesse de dérive entre les électrons et les ions. On peut obtenir ensuite un seuil d'instabilité minimum en minimisant l'amortissement par rapport au vecteur d'onde comme on l'a fait pour les ondes cyclotroniques ce qui a été fait par Fried et Gould (6) . La figure 25 empruntée a Kindel et Kennel fait le parallèle entre le seuil d'instabilité cyclotronique et acoustique ionique (à comparer à la figure 23); On constate que les ondes cyclotroniques sont destabilisées les premières dans la gamme de températures "en vigueur" dans les

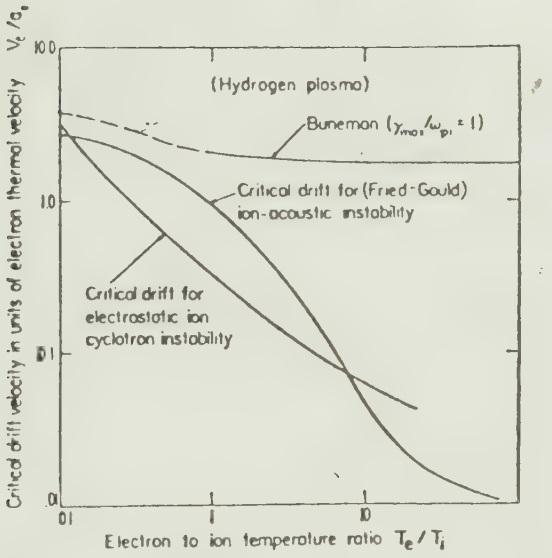


Fig. 1a. Hydrogen plasma critical drifts, normalized to the electron thermal speed, of the ion cyclotron and ion acoustic waves as a function of electron to ion temperature ratio, T_e/T_i. The H^+ cyclotron wave is unstable to the smaller current over the range $0.1 < T_e/T_i < 8$. In addition, we plot, using *Stringer's* [1964] results, the drift for which the maximum ion acoustic growth rate equals the ion plasma frequency, the transition to nonresonant strongly unstable behavior [*Buneman*, 1959]. The dotted lines indicate where Stringer's estimates may be inaccurate.

Figure 25 : Comparaison des seuils d'instabilité pour une vitesse de dérive dans le cas acoustique et cyclotronique ionique (réf 6).

plasmas de fusion.

Intégration du facteur de forme pour k // B .

Le facteur de forme se réecrit ici:

$$S(\omega,k) = 2\left\{ \left|1 - \frac{H_e}{D}\right|^2 h_e + \left|\frac{H_e}{D}\right|^2 h_i \right\}$$

où He et D=ε ont été définis plus haut, avec : $h_e = \pi^{1/2} \frac{1}{|k_\parallel| v_e} e^{-\frac{\zeta_{oe}^2}{4}}$

$$h_i = \pi^{1/2} \sum_s \frac{n_s}{n_e} \frac{z_s^2}{|k_\parallel| v_s} e^{-\left(\frac{\omega}{k_\parallel v_s}\right)^2}$$

On calcule alors un facteur moyénné :

$$\langle S(\omega,k)\rangle_{\Delta k} = \frac{1}{\pi (\Delta k)^2} \int S(\omega,k)\, e^{-\left(\frac{k_\perp}{\Delta k_\perp}\right)^2} e^{-\left(\frac{k_\parallel - k_\parallel^0}{\Delta k}\right)^2} dk_\parallel dk_\perp$$

On a tenu compte d'une géométrie"gaussienne" comme précédemment. Cette fois la boule gaussienne est centrée sur k // avec un rayon dk/k donné.On remarque qu'il ne reste pratiquement plus qu'une seule intégrale simple à calculer puisqu'à l'ordre le plus bas S(k,ω) est indépendant de $k_\perp$.On peut évaluer cette intégrale de façon approchée en utilisant une forme de S valable à basse fréquence autour de la résonance acoustique: $D_R \simeq 0$

$$S_{ac}(\omega,k) \simeq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{|k_\parallel| v_e} \left(\frac{1 + \sum_s \frac{n_s}{n_e} z_s^2 \frac{v_e}{v_s} e^{-\left(\frac{\omega}{k_\parallel v_s}\right)^2}}{\left[\zeta_{oe} + \frac{T_e}{T_i} \sum_s \frac{n_s}{n_e} z_s^2 \frac{\omega}{k_\parallel v_s} e^{-\left(\frac{\omega}{k_\parallel v_s}\right)^2}\right]} \right)$$

une méthode de Gauss à six points donne le résultat de la figure celle-ci est obtenue pour une vitesse de dérive non-nulle entre les électrons et les ions.On voit clairement l'anisotropie en fréquence du spectre par rapport à la fréquence nulle,comme le souligne l'expression ci-dessous:

$$\frac{S_{ac}(-\omega,k)}{S_{ac}(\omega,k)} = \frac{\left[\zeta_{oe} + \frac{T_e}{T_i} \sum_{s\neq e} \frac{n_s}{n_e} z_s^2 \frac{\omega}{k v_s} e^{-\left(\frac{\omega}{k v_s}\right)^2}\right]^2}{\left[\zeta_{oe'} + \frac{T_e}{T_i} \sum_{s\neq e} \frac{n_s}{n_e} z_s^2 \frac{\omega}{k v_s} e^{-\left(\frac{\omega}{k v_s}\right)^2}\right]^2} \qquad \begin{cases} \zeta_{oe} = \frac{\omega - k v_{de}}{k v_e} \\ \zeta_{oe'} = \frac{\omega + k v_{de}}{k v_e} \end{cases}$$

On peut aussi utiliser une méthode plus fine en faisant une rotation de 90 degrés du vecteur d'onde dans le programme qui a servi à calculer le spectre perpendiculaire à B.(voir alors les figures 7,13)

Annexe 2 du Chapitre IV.

Discussion de la méthode auparavant proposée pour la mesure de la charge effective $\bar{Z}$.

La méthode proposée par Evans et Yeoman souffre cependant des restrictions avec lesquelles leur formule a été établie. Ils supposent en effet les ions non magnétisées et s'intéressent pourtant au spectre basse fréquence. Il existe d'autre part une correction de vitesse de dérive non nulle dont ils tiennent compte par un calcul de correction au premier ordre (qu'il justifie par le fait que vde/ve est toujours très faible de l'ordre du pourcent dans les "Tokamaks"), ils concluent que les effets d'impuretés sont plus importants que les effets de vitesse de dérive pourvu que le vecteur k ne soit pas trop près de la perpendiculaire à B. Nous nous permettons d'être en désaccord avec leur méthode de diagnostic : leur formule,

$$S(\alpha, \omega \simeq 0) = (2\pi)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{kV_{io}\cos\theta_B}\,\frac{1}{A^2}\left\{\frac{V_{io}}{v_e}\,e^{-\left(\frac{\omega_{pe}}{\Omega_{ce}}\right)^2\frac{\sin^2\theta_B}{\alpha^2}}A^2+\Gamma\right\}$$

où $A = 1+1/\alpha^2+\frac{T_e}{T_i}\bar{Z}$, Γ est non explicité

peut se réécrire dans nos notations :

$$S(\alpha, \omega \simeq 0) = \frac{(2\pi)}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{kV_{io}\cos\theta_B}\,\frac{1}{A^2}\left\{\frac{V_{io}}{v_e}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{T_e}{T_i}\bar{Z}\right)^2+\underbrace{\sum_i\frac{n_i z_i^2}{n_e}\,\frac{V_{io}}{V_i}\sum_n\Gamma_n(k)\,e^{-\left(\frac{n\Omega_i}{k_{\parallel}V_i}\right)^2}}_{B}\right\}$$

Ou encore à <u>tous</u> les ordres en vde/ve :

$$S(\alpha, \omega \simeq 0) = \frac{(2\pi)}{\sqrt{\pi}}\left\{\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{T_e}{T_i}\bar{Z}\right)^2\frac{V_{io}}{v_e}\,e^{-\left(\frac{v_{de}}{v_e}\right)^2}+B\right\}\frac{1}{kV_{io}\cos\theta_B\left(A-\frac{T_i}{T_e}\,2\left(\frac{v_{de}}{v_e}\right)^2\right)^2}$$

Or le facteur Γ contient une dépendance angulaire non nulle sauf si l'on se trouve dans le domaine de "nos" modes, ce qui est exclus ici. Par conséquent la visée à deux paramètres de diffusion différents conduit, à moins de changer de laser en cours de route (le module de K de diffusion doit varier à θ_B = cte si la direction est fixée) à deux directions θ_B de diffusion différentes donc on ne peut éliminer si facilement le facteur Γ en l'ignorant, ce dernier dépend d'ailleurs de $\bar{Z}$!

En effet pour nos modes $\frac{\omega s}{k_{//}Vs} \gg 1$, ici $K_{//}Vs/\omega s \simeq 1$ ou $\ll 1$ et il faut garder les harmoniques non nulles ce qui a pour effet de rendre le facteur Γ dépendant de l'angle et par conséquent on a besoin de connaître sa valeur pour déduire Zeff de deux visées.

Car si KP n'est pas très petit devant un, si l'on garde le terme en Λe dans l'exponentielle, il faut aussi garder le terme ionique contenant $\Lambda_i \simeq \frac{T_i m_i}{Z_i^2}$ Soit $\Lambda_i = \frac{T_i}{T_e}\,\frac{m_i}{m_e}\,\frac{1}{Z_i^2}\,\Lambda e$.

Annexe n° 3 du Chapitre IV.

Correction sur la mesure de Te/Ti lorsqu'il existe des impuretés.

On peut se spécialiser également à un cas de quelque utilité pour les Tokamaks : celui des impuretés lourdes fortement ionisées en proportions faibles : on définit alors une charge effective

$$Zeff = \frac{\sum_{s=1}^{l} ns Zs^2}{\sum_{s=1}^{l} ns Zs}$$

$Zeff \geq 1$.

On supposera que $1 \leq Zeff \leq 5$ ce qui couvre tous les cas usuels.

Si de plus $\sum_{s \neq io} ns Zs \ll nio$ on va pouvoir effectuer un traitement différentiel.

On a : $\Lambda s = \Lambda io \frac{ms}{mio} \frac{Ts}{Tio} \frac{Zio^2}{Zs^2}$

Si l'on suppose en outre toutes les espèces ioniques à la même température et $\frac{ms}{Zs} \vee \frac{mio}{Zio}$ alors $\Lambda s = \Lambda io \frac{Zio}{Zs}$.

On peut alors chercher la correction sur $\frac{Te}{Ti}$ qu'apporte un $Zeff \neq 1$.

Le système (II) se réécrit, sit $Z_{io} = 1$:

$$\frac{Ti}{Te} = - \sum_{n} \frac{n}{n-\omega} \left[\frac{nio}{ne} \Gamma n(\Lambda io) + \sum_{s \neq io} \frac{ns Zs^2}{ne} \Gamma n(\Lambda s) \right]$$

Si on différentie par rapport à Λ_{io}

$$0 = \sum_{n} \frac{n}{n-\omega} \left[\frac{n_{io}}{n_e} \Gamma' n(\Lambda io) + \sum_{s \neq io} \frac{ns}{n_e} Zs \, \Gamma' n(\Lambda s) \right]$$

donc $\frac{Ti}{Te} = (\frac{Ti}{Te})_o \frac{nio}{ne} + \Delta(\frac{Ti}{Te})$

le terme correctif Δ vient du fait qu'en présence d'impuretés $\Lambda io \neq \Lambda^*_{n,i_o}$ mais vaut $\Lambda^*_{n,io} + \Delta\Lambda_{n,io}$

soit $\Delta(\frac{Ti}{Te}) \underline{v} - \sum_n \frac{n}{n-\omega} \sum_{s\neq io} \frac{nsZs^2}{ne} \Gamma n(\frac{\Lambda^*_{n,io}}{Zs})$

comme $Zs \gg 1, \frac{\Lambda^*_{n,io}}{Zs} \ll 1$ et on peut développer les fonctions $\Gamma n(x)$ autour de $x = 0$.

$$\Gamma n(\frac{\Lambda^*_{nio}}{Zs}) \underline{v} (\frac{\Lambda^*_{nio}}{2Zs})^n \frac{1}{n!}$$

d'où une correction sur $\frac{Ti}{Te}$ autour d'une harmonique n :

$$\frac{Ti}{Te} = \frac{nio}{ne} (\frac{Ti}{Te})_o - \sum_{s\neq io} \frac{nsZs^2}{ne} \{ \frac{2n^2}{n^2-\omega^2} [\frac{\Lambda^*_{n,io}}{2Zs}]^n \frac{1}{n!} + \Lambda^*_{1,io} \frac{1}{1-\omega^2} \}$$

en particulier pour l'harmonique 1 :

$$\frac{Ti}{Te} \simeq \frac{nio}{ne} (\frac{Ti}{Te})_o - \frac{1}{1-\omega^2} \sum_{s\neq io} \frac{nsZs}{ne} \Lambda^*_{1,io}$$

soit $\Delta (\frac{Ti}{Te}) = \sum_s \frac{nsZs}{ne} \frac{\Lambda^*_{1,io}}{\omega^2-1} + (\frac{Ti}{Te})_o (1-\frac{nio}{ne}) = \sum_s \frac{nsZs}{ne} \frac{\Lambda^*_{1,io}}{\omega^2-1} - (\frac{Ti}{Te})_o$

Le tableau ci-dessous résume les valeurs des 2 membres du crochet de droite. Ce terme apparait comme toujours positif. La valeur de $\frac{Te}{Ti}$ est donc légèrement surestimée si l'on fait abstraction du Zeff.

$\frac{Te}{Ti}$	$(n=1)\frac{\Lambda l^{*}_{io}}{(\frac{\Omega n^{*}_{io}}{\Omega n_{io}})^{2} - 1}$	$\frac{Te}{Ti}$ corrigée* pour $\sum_{s \neq io} nsZs = \frac{1}{10}$
4	0.65	3.94
3	0.905	2.95
2	1.39	1.96
1.5	1.945	1.26
1	3.15	0.83

*cette correction est faible en général, quelques pourcents.

Annexe 4 du chapitre IV.

Abaques du facteur de forme pour le mélange Deutérium-Hydrogène.

On a voulu donner simplement ici des valeurs de références pour les extrémas du spectre cyclotronique dans le cas d'un mélange de Deutérium et d'Hydrogène pour des proportions relatives variables. Les courbes des figures 17 à 20 montrent l'effet de mélange pour un pourcentage variant de 10% en 10% .Chaque figure comporte une série de quatre courbes se rapportant à une variation de Te/Ti de 1 à 4 par valeurs entières.

La position des extrémas après intégration se fait comme au chapitre III, le calcul étant légèrement plus compliqué dans un tel cas à cause de la"dégénérescence" du au fait que la fréquence cyclotronique ionique de l'hydrogène est le double de celle du Deutérium, lorsque l'harmonique est paire il faut alors tenir compte de deux fois plus de termes au maximum pour évaluer les corrections.

Figures 17 a, b, c - 18 a, b, c - 19 a, b, c

20 a, b, c.

$\frac{\omega_{pi}^2}{\Omega i^2} = 1000$

$\frac{Te}{Ti}$ varie de 1 à 4 ce qui correspond à la numérotation de la figure 17 a.

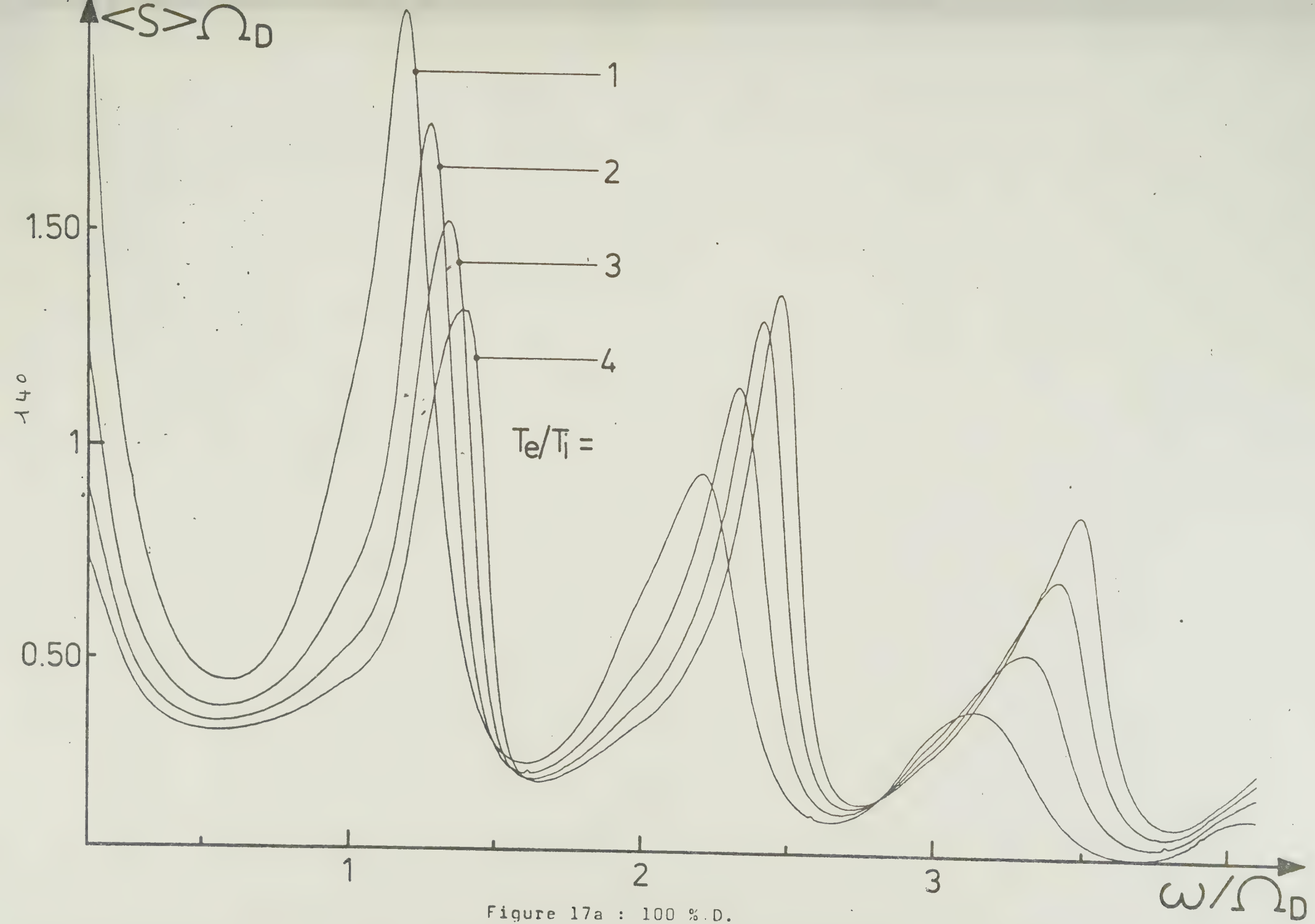
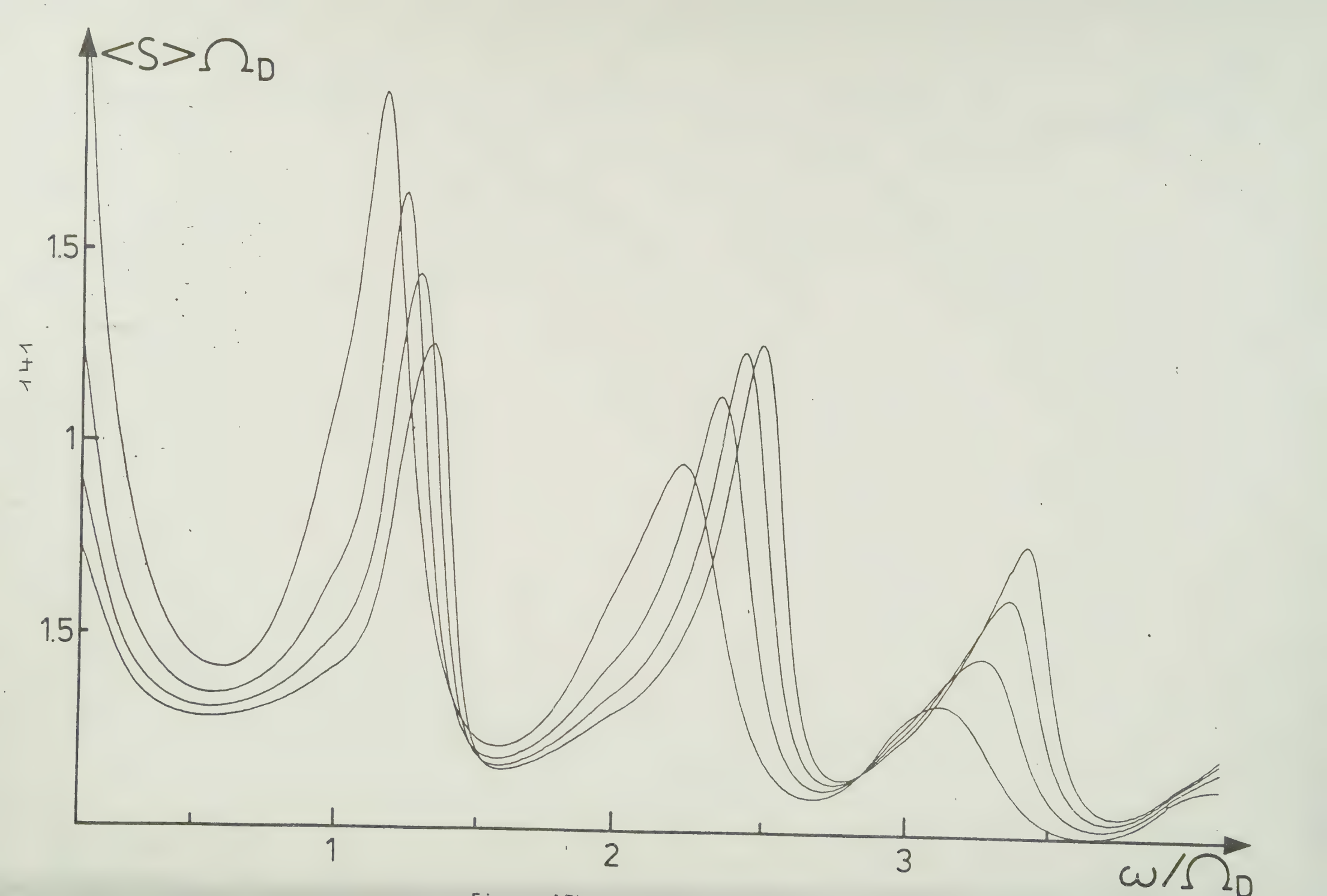


Figure 17a : 100 % D.


<S>Ω_D
1.5
1
1.5
1
2
3
ω/Ω_D

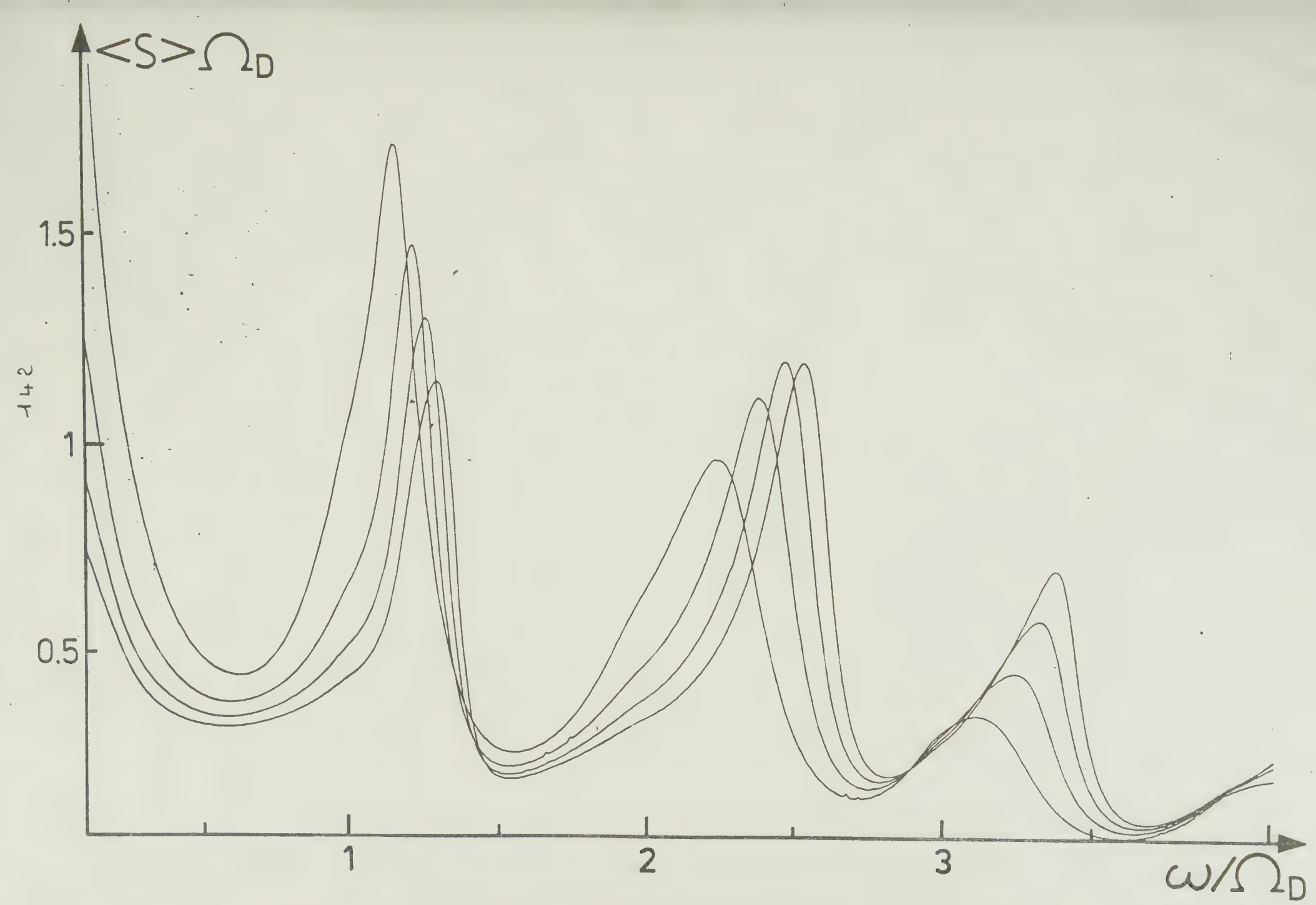
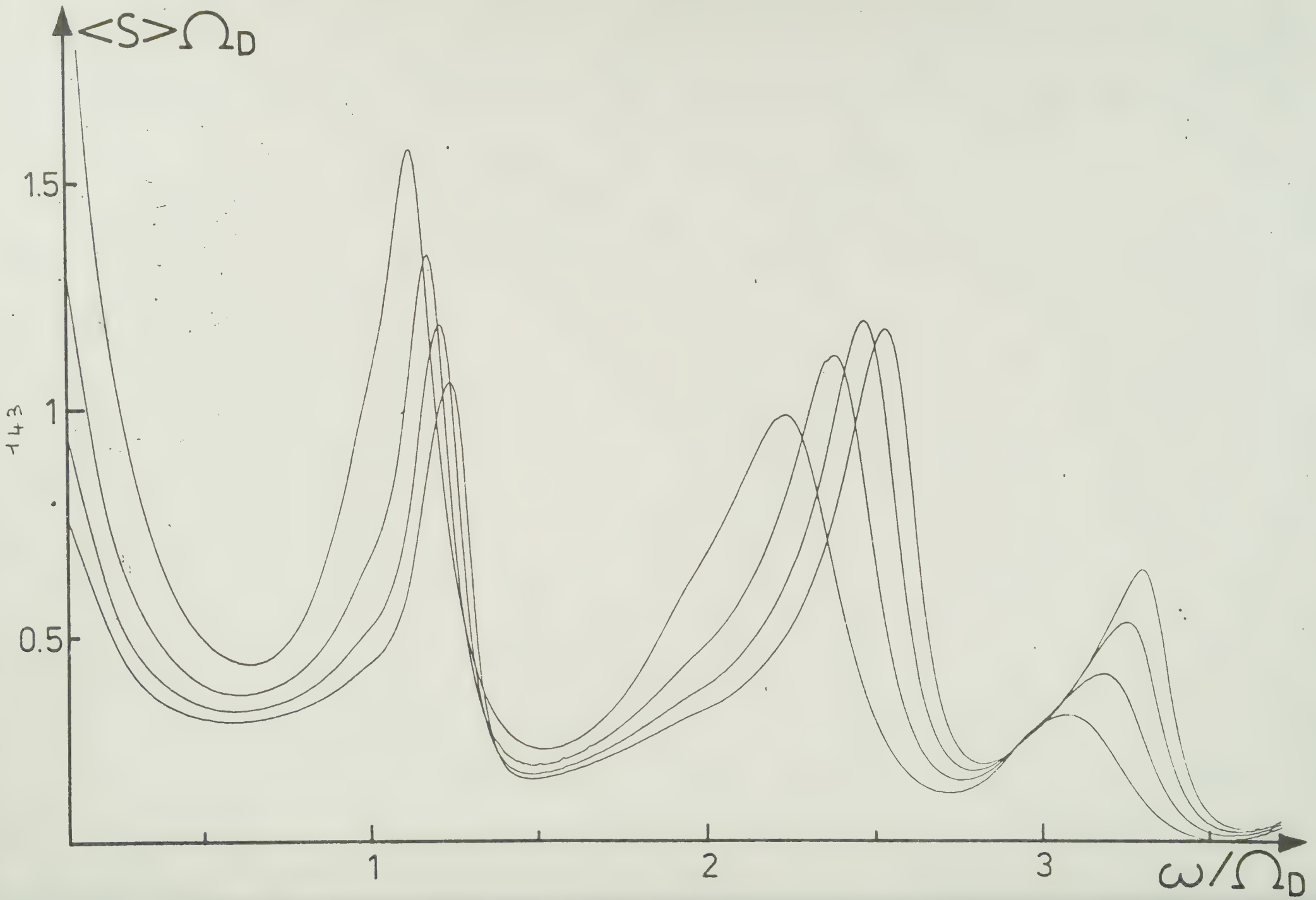


Figure 17c : 80 % D - 20 % H.


<S>Ω_D
1.5
1
0.5
143
1
2
3
ω/Ω_D

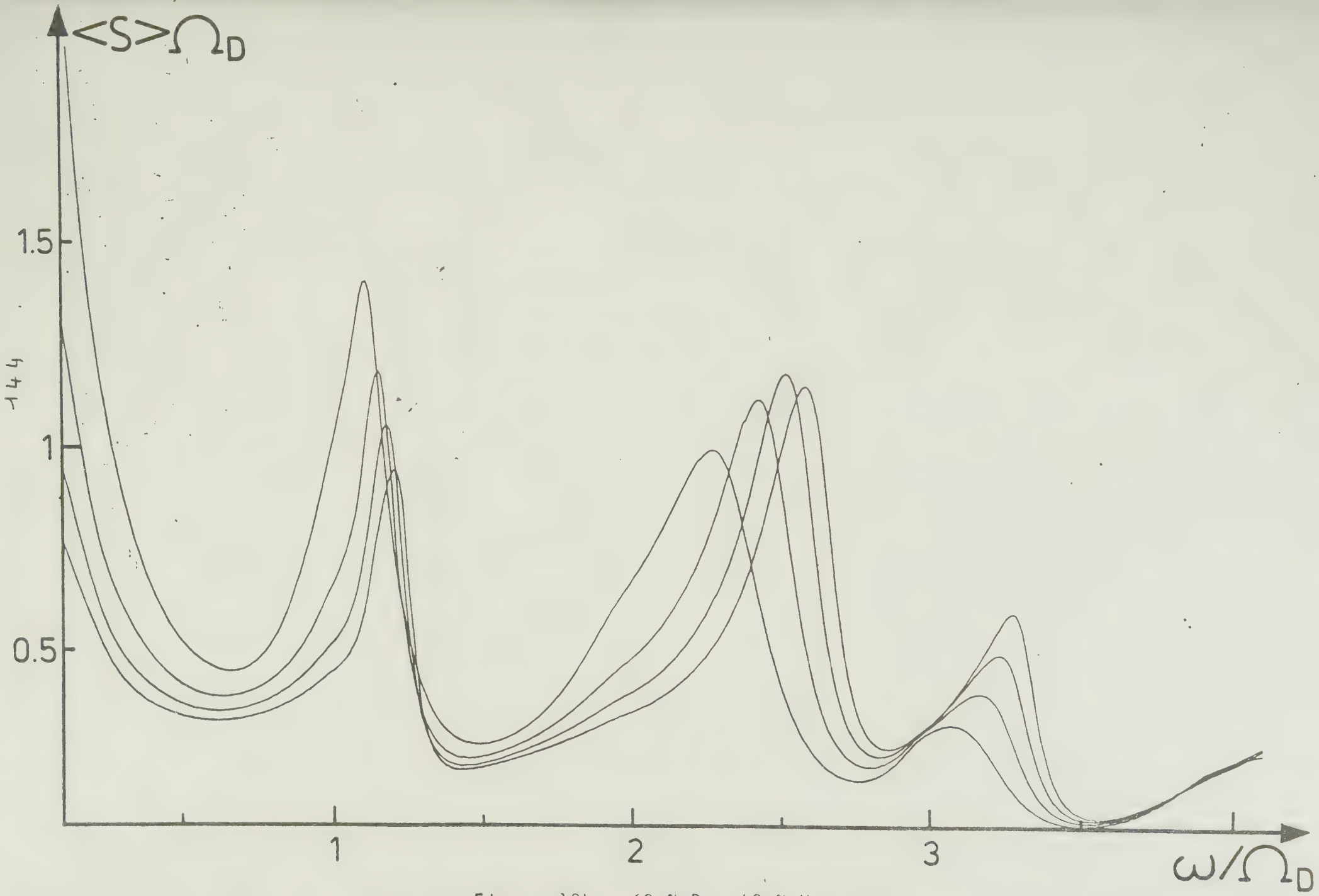


Figure 18b : 60 % D - 40 % H.

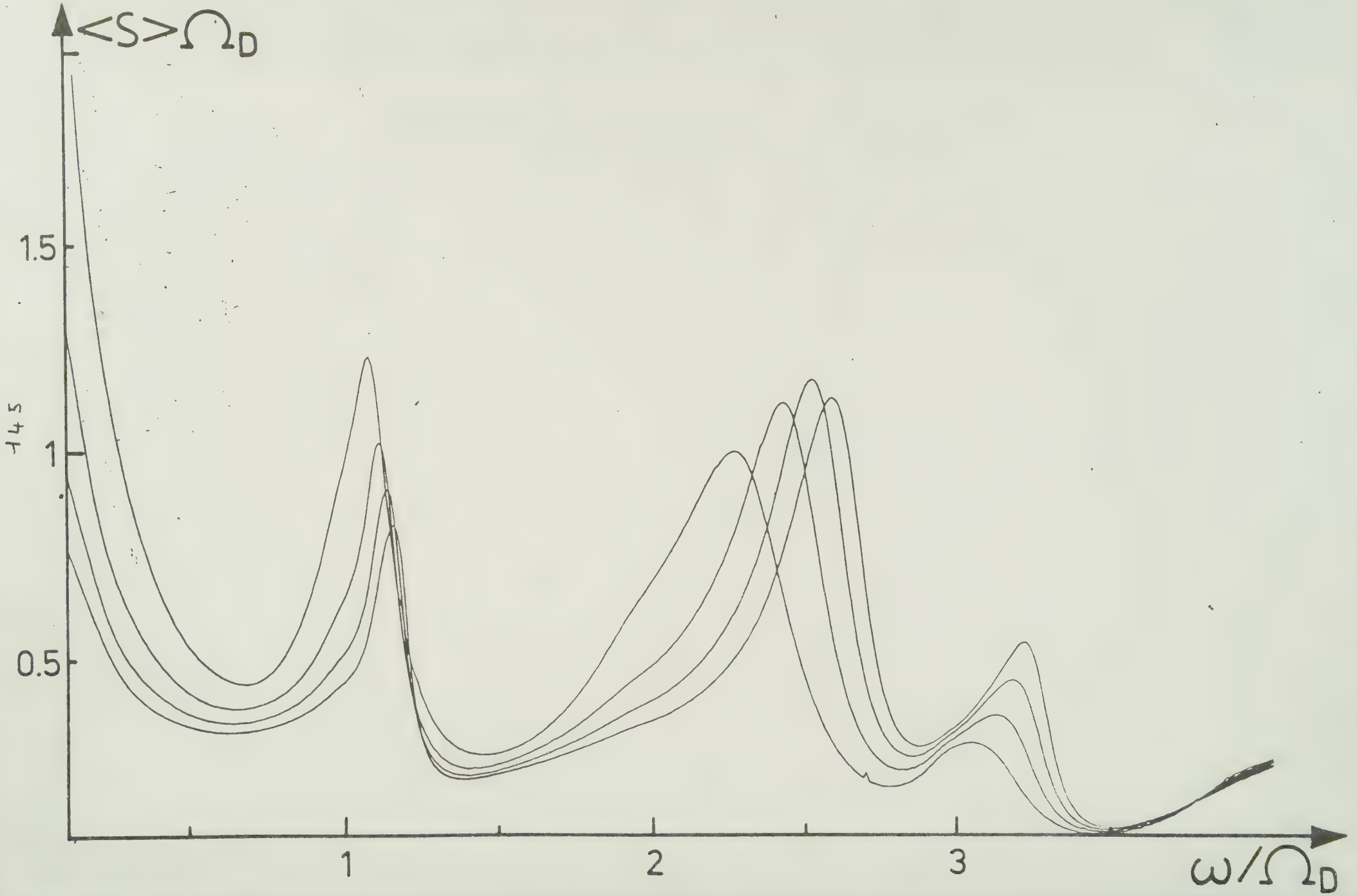


Figure 18a : 50 % D - 50 % H

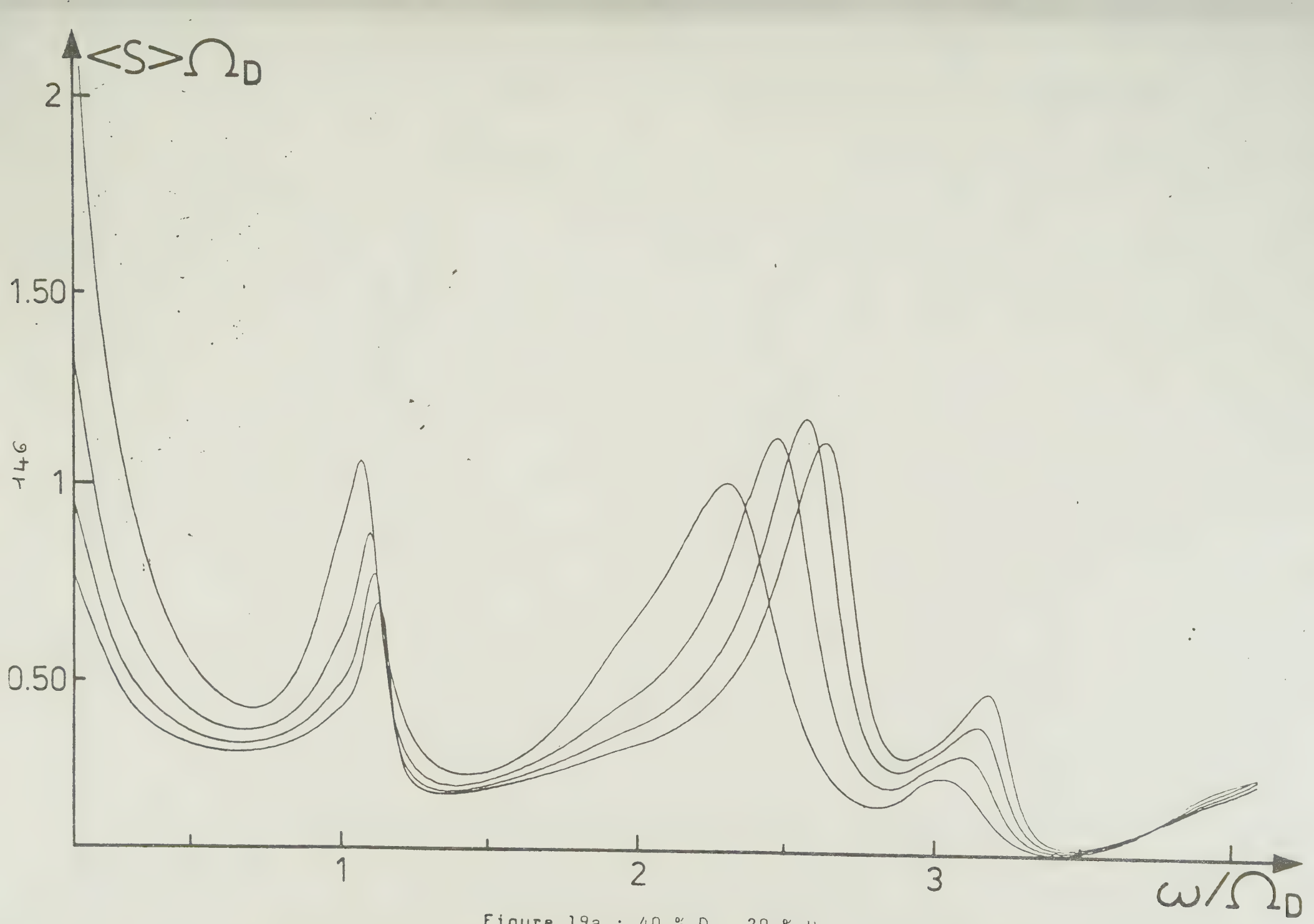


Figure 19a : 40 % D - 20 % H.

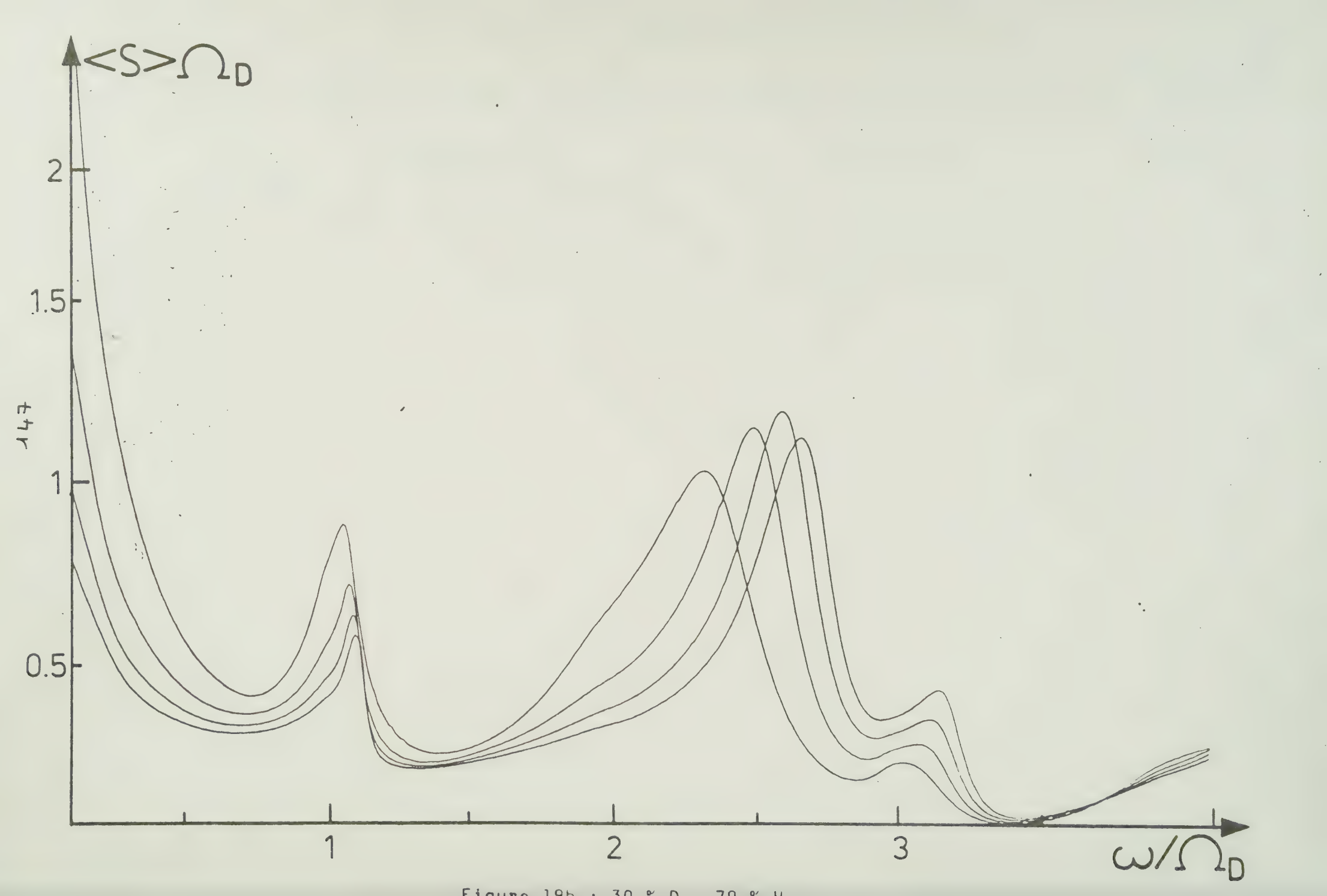


Figure 18b : 30 % D - 70 % H

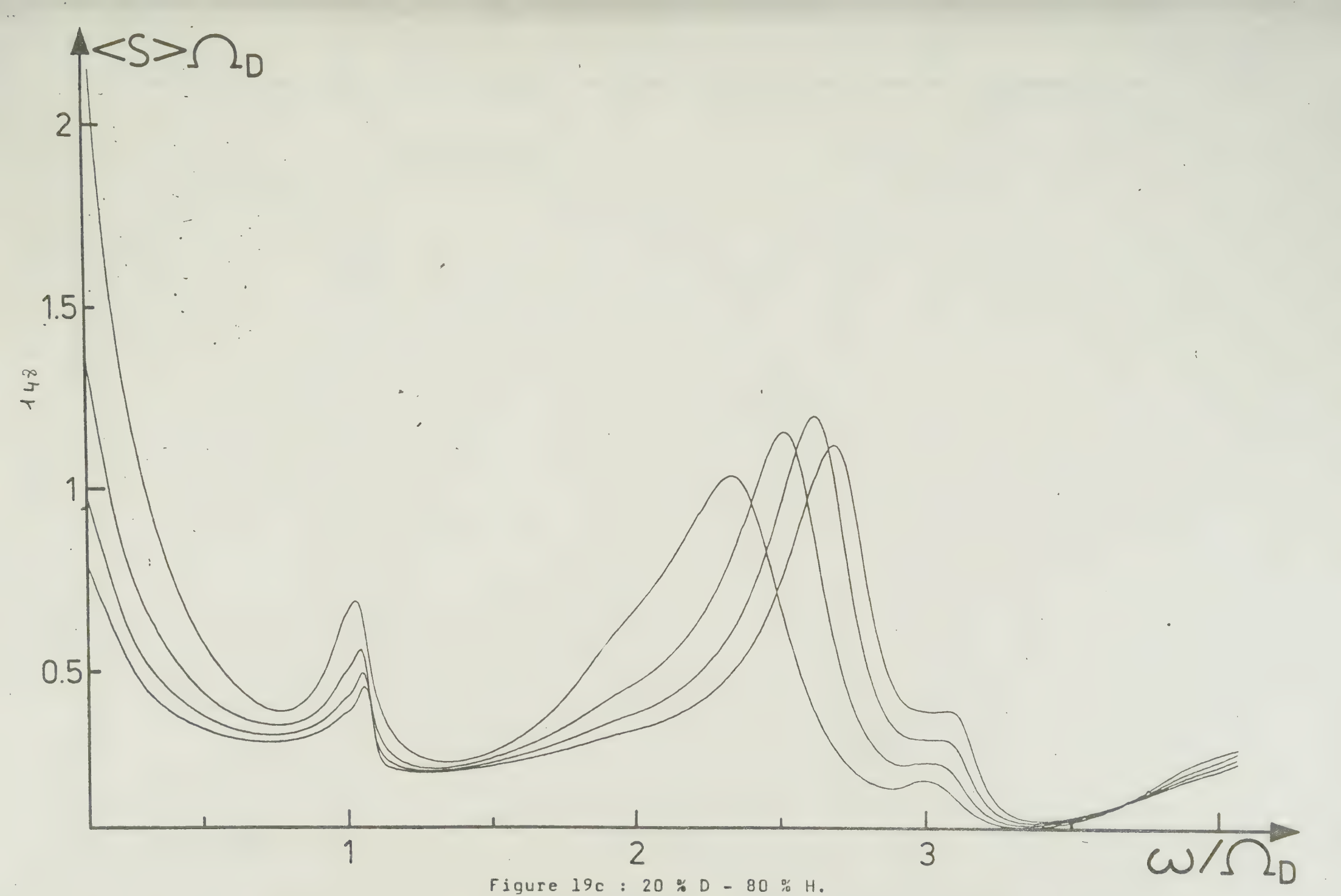


Figure 19c : 20 % D - 80 % H.

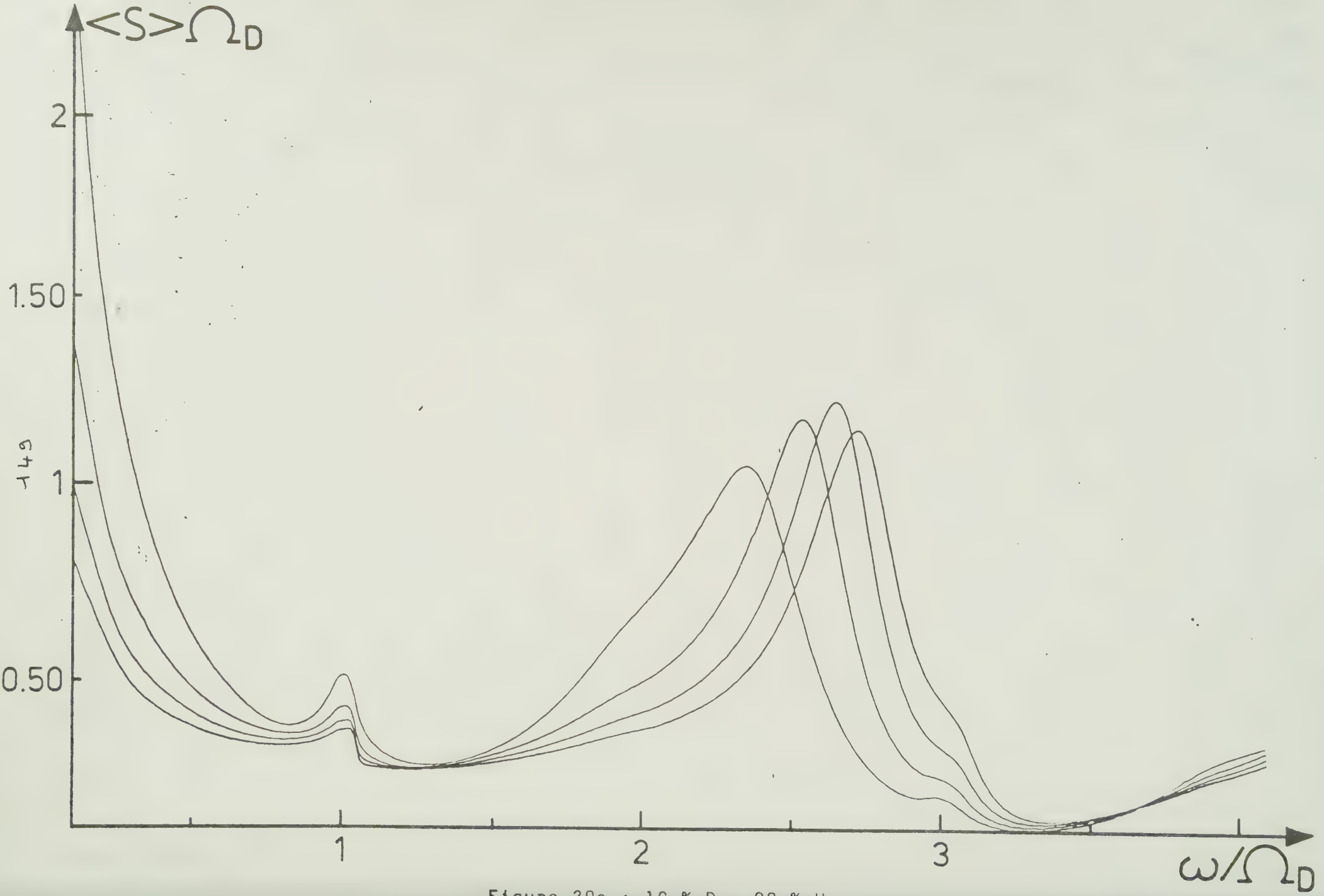


Figure 20a : 10 % D - 90 % H.

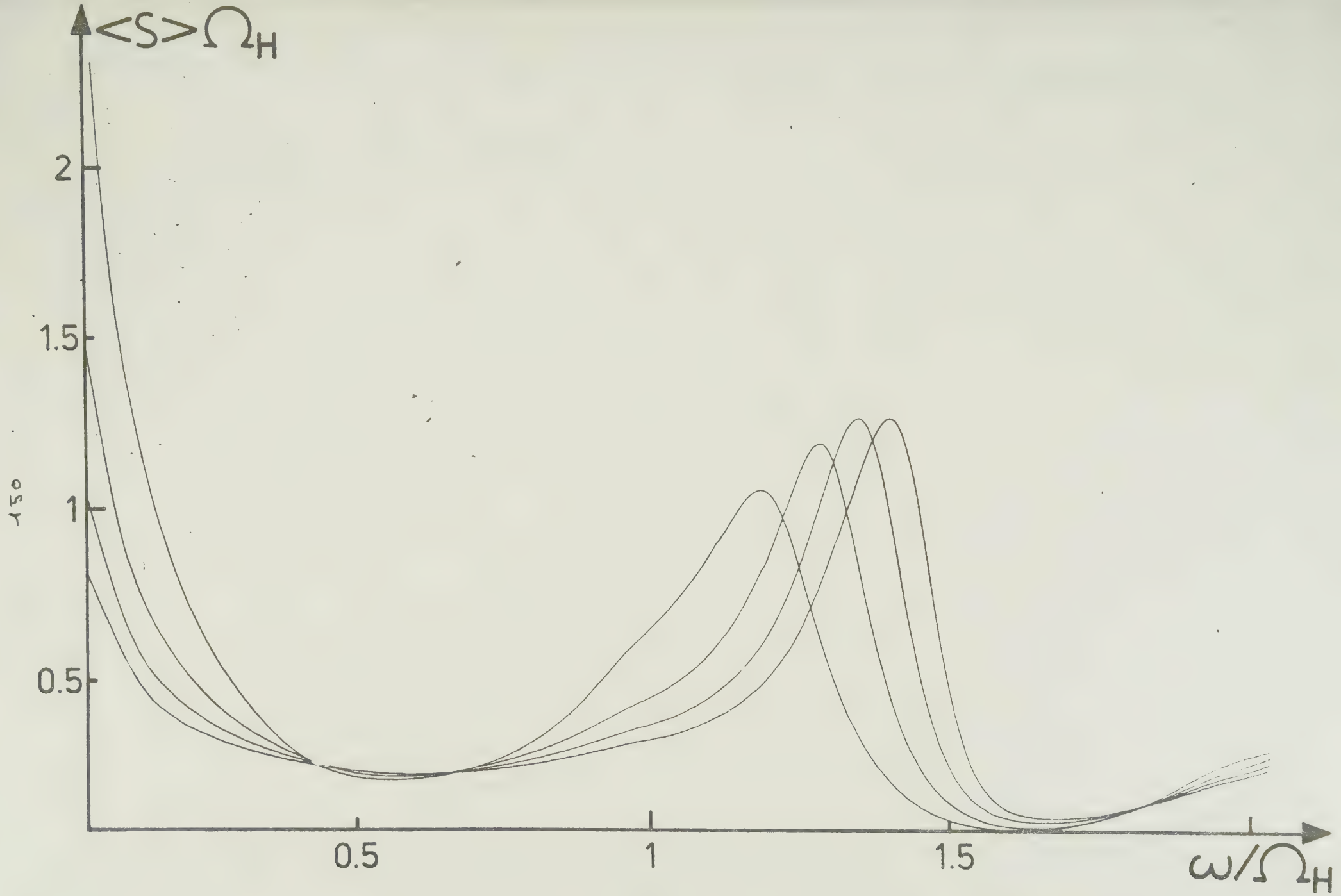


Figure 20b : 0 % D - 100 % H.

Références du Chapitre IV.

(1) J. Olivain, Guide de la diffusion cohérente dans l'infra-rouge lointain, rapport Cea:Cea-Fc-1024 (1979).

(2) D.E. Evans, Plasma physics, 12, 573 (1970).

(3) J. Sheffield, Scattering theory and Expériment, Academic Press New York (1975).

(4) D.E. Evans, M.J. Forrest, J. Katzenstein, Nature, 212, n°3057, 21, (1966).

(5) D.E. Evans, M.L. Yeoman, Phy.Rev Letters, 33, 76 (1974).

(6) Voir la réf 1 du cha III .

(7) Voir la réf 2 du cha III .

(8) D.L. Corell, N. Rynn, H. Böhmer, Phy.of Fluids, 18, 1800 (1975).

(8b) Voir la réf 3 du cha III .

(8c) O. Demokan, Plasma Physics, 18, 569 (1976).

(8d) Voir la réf 10 du cha V .

(9) N.L. Bretz, Applied Physics Letters, 31, 372 (1977).

(10) D.L Corell, H. Böhmer, N. Rynn, R.A. Stern, Phy.of Fluids, 21, 2208(1977).

(11) M. Ono, K.L Wong, Phy.Rev Letters, 45, 1105 (1980).

(12) D.C Watson, A. Bers, Phy.of Fluids, 20, 1704 (1977).

(13) M. Ono, M. Porkolab, R.P.H. Chang, Phy.of Fluids, 23, 1656 (1980)

(14) J.L. Sperling, F.W. Perkins, Phy.of Fluids, 17, 1857(1974).

(15) C. Chan, K.E. Lonngren, N. Hershkowitz, University of Iowa 80-4 (March 1980).

(16) A.P.H Goede, P. Massmann, H.J. Hopman, J. Kistemaker, Nuclear Fusion, 16, 85 (1976).

(17) N.Rynn, H. Böhmer, J.P Hauck, Phy.of Fluids, 19, 450 (1976).

(18) J.A Tataronis, J.W Crawford, J.Plasma Physics, 4, 231 et 241 (70

(19) M. Yamada, S.Seiler, H.W. Hendel, H.Ikezi, Phy.of Fluids, 20, 450 (1977)

(20) mêmes auteurs qu'en 19, Phy.Rev.Letters, 36, 319 (1976).

CHAPITRE V

	Pages
EFFETS SPECIFIQUES AUX "TOKAMAKS".	151
Introduction.	152
1) Effet des collisions.	152
a) Collisions entre particules neutres et particules chargées.	153
b) Cas des collisions coulombiennes.	155
Modèle BGK.	155
Etude collisionnelle pour le spectre cyclotronique.	156
Modèle Fokker-Planck.	163
2) Influence du cisaillement des lignes de champ magnétique.	168
- Ce que serait un traitement rigoureux.	168
- Modèle en tranches.	168
- Validité statistique du modèle WKB.	172
3) Effets négligés, limitation de l'étude.	173
Conclusion de ce chapitre.	174
Annexe 1 : Modification du facteur de forme pour tenir compte des collisions. Modèle BGK.	175
Annexe 2 : Modèle Fokker-Planck pour les collisions.	178
Références.	180

Chapitre V

Effets spécifiques aux "Tokamaks".

Introduction:

Tout plasmicien à qui l'on présenterait les résultats des chapitres précédents poserait sur le champ un certain nombre de questions qui se révèlent être plus ou moins indiscrétes et auquelles on va tâcher de répondre dans les différents sous-paragraphes de ce chapitre.Nous remercions ici au passage, les théoriciens C.T Dum et G.Schmidt pour avoir attiré notre attention,respectivement sur le rôle des collisions et sur l'influence de la torsion du champ magnétique;il se pose un certain nombre d'autres questions telles que les corrections de géométrie finie ,les effets de gradient de densité et de champ magnétique etc ,questions sur l squelles nous dirons également un mot à la fin de ce chapitre.

1)Effet des collisions.

Les"Tokamaks" travaillent dans des régimes typiquement non collisionnels en tout cas très faiblement collisionnels;cependant,il est possible que certaines collisions même si leurs fréquences restent notablement inférieures aux fréquences de travail puissent affecter notablement les caractéristiques des modes fluctuants et donc le spectre de fluctuations .On va donc traiter ici le cas où la valeur de la fréquence de collision est arbitraire.Nous montrons ici que seules les collisions ion-ion peuvent à priori jouer un rôle important sur les ondes cyclotroniques ioniques et qu'il peut être nécessaire de considérer la déformation correspondante du spectre de densité associé.Faisons auparavant une brève revue des différentes collisions susceptibles d'être envisagées.

a) Collisions entre particules neutres et particules chargées.
Disons tout de suite que ce type de collision sera très peu important pour nous pour les raisons suivantes:les collisions électron-neutre sont peu efficaces en règle générale et elles n'influençeront pas le spectre de diffusion.Pour ce qui concerne les collisions ion-neutre elles sont peu nombreuses tout simplement parce que la densité de particules neutres est très faible au centre des machines toroidales (suffisante pourtant pour déduire une estimation de la température ionique par les collisions de transfert de charge),typiquement on a $No \lesssim 10^{8} cm^{-3}$ alors que $Ni \underline{v} 10^{14} cm^{-3}$;la figure 1 tirée d'un article du groupe TFR de 1975 montre la densité radiale des neutres.(1).On peut cependant prendre en compte ces dernières collisions par un modèle BGK(pour Bathnagar Gross et Krook (2)) qui rend bien compte des collisions binaires à grands angles de déflection.
Disons alors que de manière générale ces collisions sont susceptibles d'atténuer les résonances en amortissant les ondes(le spectre peut être légèrement déformé:petit décalage de la position de ses extrémâs un peu élargis).

Cependant ces collisions peuvent avoir rôle très important dans l'ionosphère notamment où les plasmas sont faiblement ionisés ,comme l'ont montré Farley et Dougherty (3).(les gyrorésonnances disparaissent alors si $V_{i-n} \underline{v} n\omega ci$ et si la longueur d'onde d'excitation est supérieure à la longueur d'onde de Debye).
Le modèle phénoménologique BGK peut être élaboré à plusieurs niveaux (voir annexe 2) ici on considère le cas le plus simple il consiste à écrire un second membre à l'equation de Vlasov pour traduire la relaxation de la fonction de distribution vers sa valeur d'équilibre sous l'effet des collisions,sous la forme:

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} = -\nu_s^* (f_s - n f_{0s}) \qquad (1)$$

cette équation est souvent écrite pour chaque type de particules mais en prenant en compte toute les collisions possibles pour un type donné de particules par la collision effective ν_s^*.Nous allons ici commettre aussi cet abus car nous écrivons une équation de type BGK pour les ions en ne considérant que

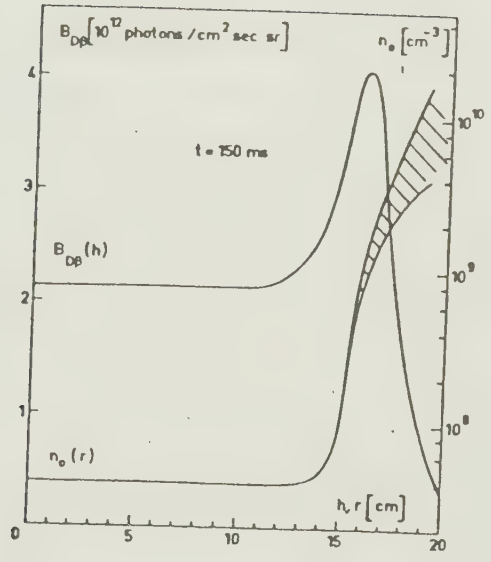


Figure 1 : Profil radial $n_0(r)$ des particules neutres dans une décharge de TFR (réf 1).

des collisions ion-ion cette fois,il s'agit alors de collisions coulombiennes.

b) Cas des collisions coulombiennes.

On élimine d'entrée les collisions électron-électron et électron-ion car il se trouve que pour les modes ioniques de vitesse de phase bien inférieure à la vitesse thermique électronique (notre cas) ces collisions ont un effet négligeable.En effet la fonction de distribution des électrons est dans ce cas maxwellienne ce que l'on a supposé en écrivant la définition des modes.

Les collisions importantes sont alors celles entre les ions.

De nombreuses études expérimentales viennent confirmer leurs effets sur l'amortissement des modes cyclotroniques (5),(6),l'influence de ces collisions a été traduite en terme de viscosité ionique (9),(10),(11),(14),(15) .

La prise en compte de ces collisions est faite d'habitude à l'aide de deux modèles que l'on va à présent utiliser.

-Modèle BGK.

On l'a présenté succintement plus-haut il peut sembler abusif de l'utiliser aussi pour les collisions à faibles angles de déviation ,mais cel peut être justifié.

On doit tout d'abord calculer la fréquence de collision effective qui intervient dans l'équation (1);en ordre de grandeur:

$\nu_{ii} \simeq \omega_{pi}/\Lambda \qquad \Lambda \simeq n\lambda_d^3$

et plus précisément en utlisant les valeurs données par Spitzer (7):si 1 et 2 désignent deux ions chargés le premier étant la particule "test" et le second la particule de "champ":

$$\nu_{1,2} \simeq n_1 Z_1^2 Z_2^2 \frac{11.4}{T_1^{3/2}(A_1)^{1/2}} \log \Lambda_{12} \qquad (2)$$

$$\Lambda_{12} = \frac{3}{2e^3}\frac{1}{Z_1 Z_2}\left(\frac{(kT_1)^3}{\pi N_1}\right)^{1/2} \qquad (3)$$

où les fréquences sont en Hertz à condition de prendre la densité en cm^{-3} et la température en degrés.

On a ainsi la fréquence de déflection à 90 degrés ,en ayant exclus la dépendance en vitesse de la fréquence(la vitesse est prise égale à la vitesse thermique).

Ai désigne la masse atomique de l'ion et Log Λ le Logarithme de Coulomb.

L'application numérique typique pour les Tokamaks pour deux ions une fois chargés donne: $n_i = 5\,10^{13}\,cm^{-3}$ $k_B T_i \sim 1\,KeV$ $\log\Lambda \sim 6$

$\nu_{ii} \simeq 300\,Hz$ $10^{-6}\Omega_i$ (oscillations) $\simeq 30\,x\,2\pi$ rad/s ($B = 4.5$ Tesla) $\frac{\nu_{ii}}{\Omega_i} \simeq 10^{-6}$

Donc un paramètre $\frac{\nu_{ii}}{\Omega_i}$ très petit devant l'unité et l'on peut conclure que les collisions sont négligeables.Cependant la fréquence de collision peut augmenter de plusieurs ordres de grandeur s'il existe des impuretés fortement ionisées dans le plasma :pour $Z_2 \geq 30$ on obtient ainsi : $\frac{\nu_{ii}}{\Omega_i} \simeq 1/600$ ce qui encore faible.

Theimer et Sandalov (8),(9) ont étendu les travaux d'Evans dans le cas acoustique ionique pour tenir compte des collisions en présence d'impuretés.La figure 2 (9) montre le rôle des collisions (courbeC) comparé au cas non collisionnel (courbe A) pour un plasma de Deutérium pur ,puis de D+ 99% et 1% de Mo 42+ .La conclusion de cette étude est qu'avec ce modèle phénoménologique l'effet collisionnel devient notable dès que $\gamma_\mu \gtrsim \frac{1}{10}$ (où $\gamma_\mu = \frac{\omega_\mu^*}{k v_\mu} \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\mu'} \frac{n_{\mu'} Z_{\mu'}^2}{(m_{\mu\mu'})^2} \left\langle \frac{1}{v_{\mu\mu'}^3} \right\rangle \log\Lambda_{\mu\mu'} k_{\mu\mu'}$ (4)

ce qui se simplifie après quelques hypothèses raisonnables en :

$\gamma_\mu \simeq 10^{-3} \frac{Z_\mu^2}{k T_\mu^2} Z_{eff}\, n_e$,k est le vecteur d'onde et V la vitesse thermique

Etude collisionnelle pour le spectre cyclotronique.

On a repris une étude analogue dans le cas d'un plasma magnétisé en utilisant les faibles valeurs de $\frac{\nu_{ii}}{\Omega_i}$ calculées ci-dessus.

L'annexe 1 décrit en détail comment modifier le programme de calcul (on a besoin à présent de la fonction de dispersion d'argument complexe).La figure 3 montre le résultat de ce calcul pour un plasma de D+ à 99% et 1% de Mo^{42+}.

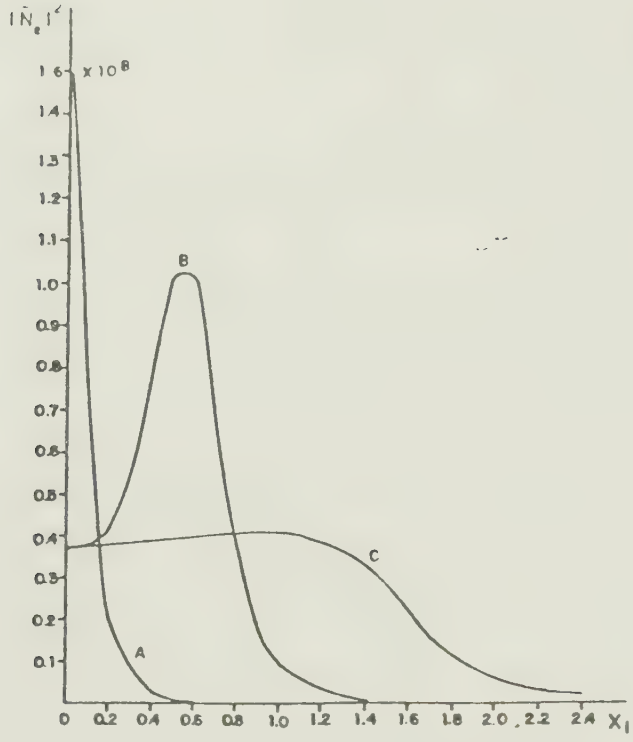


FIG. . The electron density fluctuation spectrum $|\bar{n}_e|^2$ as a function of the reduced frequency x_i. All three curves have $k = 600\ \mathrm{cm}^{-1}$, $T_e = T_i = 3 \times 10^4$ °K, $n_e = n_i = 10^{16}\mathrm{cm}^{-3}$, and $n_a = 0$. Curve A: $y_e = y_a = 0$, $y_i = 4.63$; calculated from the nonlinear theory. Curve B: $y_e = y_a = 0$, $y_i = 4.63$; calculated from the linear theory. Curve C: $y_e = y_i = y_a = 0$.

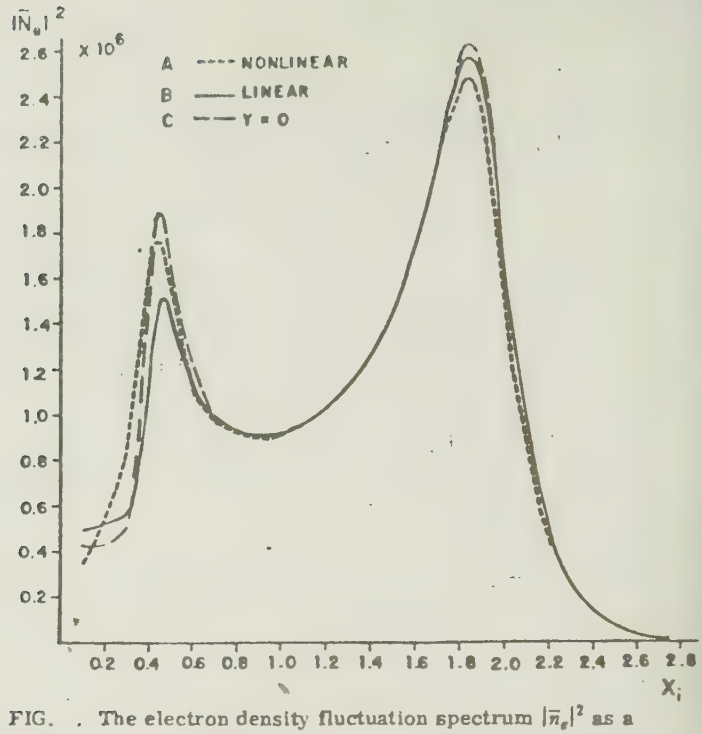


FIG. . The electron density fluctuation spectrum $|\bar{n}_e|^2$ as a function of the reduced frequency x_i. All three curves have $k = 600\ \mathrm{cm}^{-1}$, $Z_a = 42$, $T_e = 1.57 \times 10^8$, $T_i = T_a = 3.14 \times 10^7$ °K, $n_e = 1.42 \times 10^{15}$, $n_i = 10^{15}$, $n_a = 10^{14}\ \mathrm{cm}^{-3}$ (1% molybdenum), $y_e = 0$, $y_i = 7.8 \times 10^{-5}$, and $y_a = 0.139$. Curve A: calculated from the nonlinear theory. Curve B: calculated from the linear theory. Curve C: no collisions.

Figure 2 : Spectre S(k,ω) en champ magnétique nul pour des plasmas:

-a D pur

-b 99% D+, 1% Mo42+

en abscisses $x_i = \omega / k v_i$

$y_i = \partial_i / k v_i$

$y_a = \partial_i / k v_i$ où a désigne l'impureté.

(réf 9).

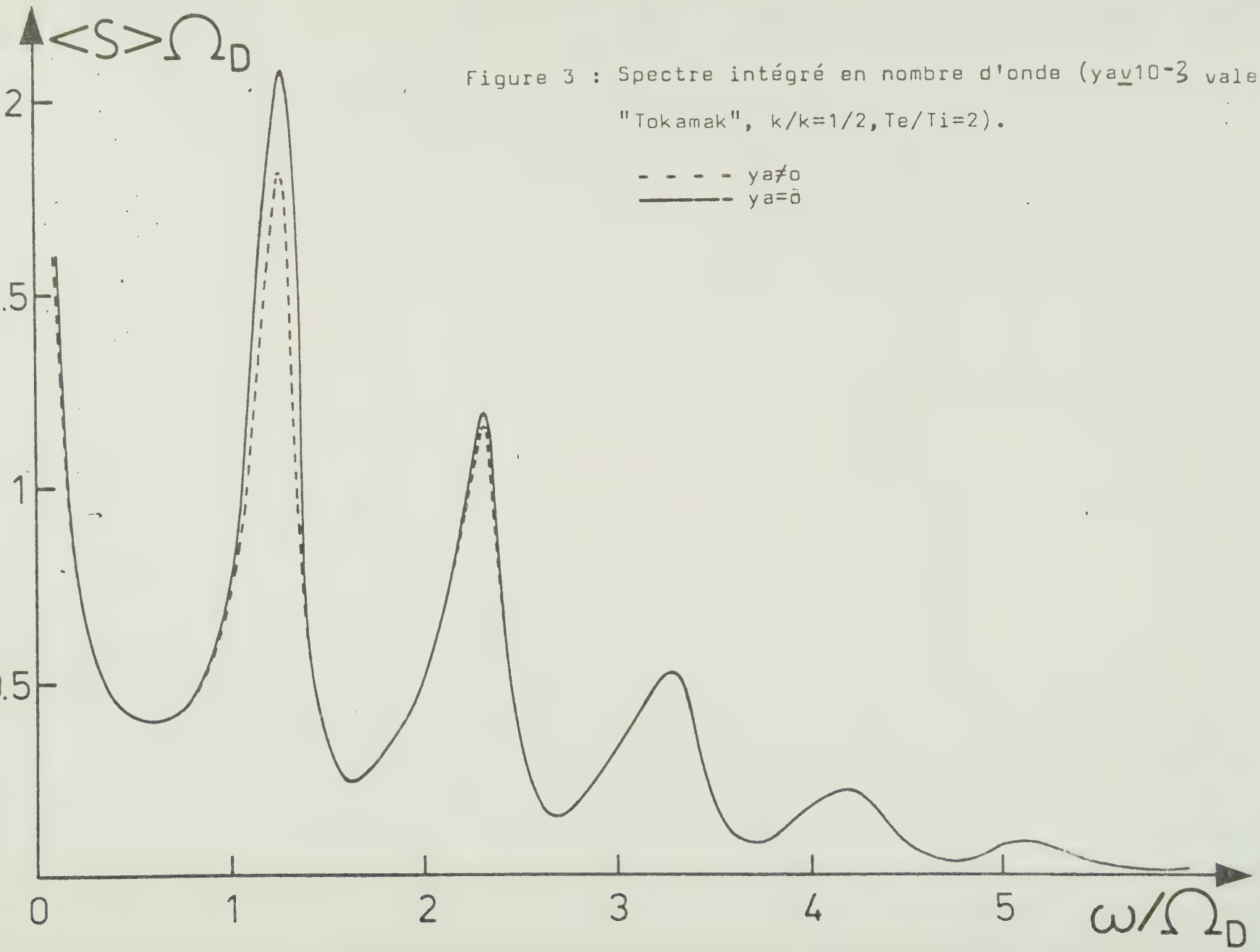


Figure 3 : Spectre intégré en nombre d'onde (ya$\underline{v}10^{-3}$ valeur "Tokamak", k/k=1/2, Te/Ti=2).

- - - - ya≠o
———— ya=ö

On constate que le spectre est pratiquement inaffecté par les collisions coulombiennes avec les paramètres en vigeur dans les "Tokamaks". (en trait pointillé la courbe avec collisions) Profitant de cette étude on a artificiellement "gonflé" l'importance des collisions pour étudier le seuil de disparition des maximas ce que l'on peut considérer approximativement comme le seuil d'amortissement des ondes correspondantes. La figure 4 montre l'évolution de la première harmonique lorsque le paramètre $\frac{\partial_{ii}}{\omega_i}$ croît (valeurs sous la figure) on constate une disparition progressive des maximas (vrai pour toutes les harmoniques) il existe un seuil que l'on peut prédire (voir annexe1) qui est de l'ordre de $\frac{\partial_{ii}}{\omega_i} \simeq 0.4$, ce qui est en accord avec les valeurs 0.2 et 0.3 observées expérimentalement (5),(6). Lorque $\frac{\partial_{ii}}{\omega_i}$ devient égal à un le spectre devient continument décroissant avec la fréquence (l'aire sous la courbe pour la fréquence variant de zéro à l'infini reste constante conformément à un théorème de fluctuation-dissipation). Si $\frac{\partial_{ii}}{\omega_i}$ vaut dix (courbe 4) le spectre est complétement dominé par les collisions et il n'existe plus aucun maxima (en supposant le modèle phénoménologique encore applicable). Notons que la courbe trois reproduit le spectre acoustique ionique (enveloppe du spectre en champ nul) qui correspond à une non-magnétisation des espèces ($\frac{\partial_{ii}}{\omega_i} \gg 1$) . La figure 5 précise de plus près le seuil de disparition des résonances ainsi que l'allure du spectre au-dessus du seuil.

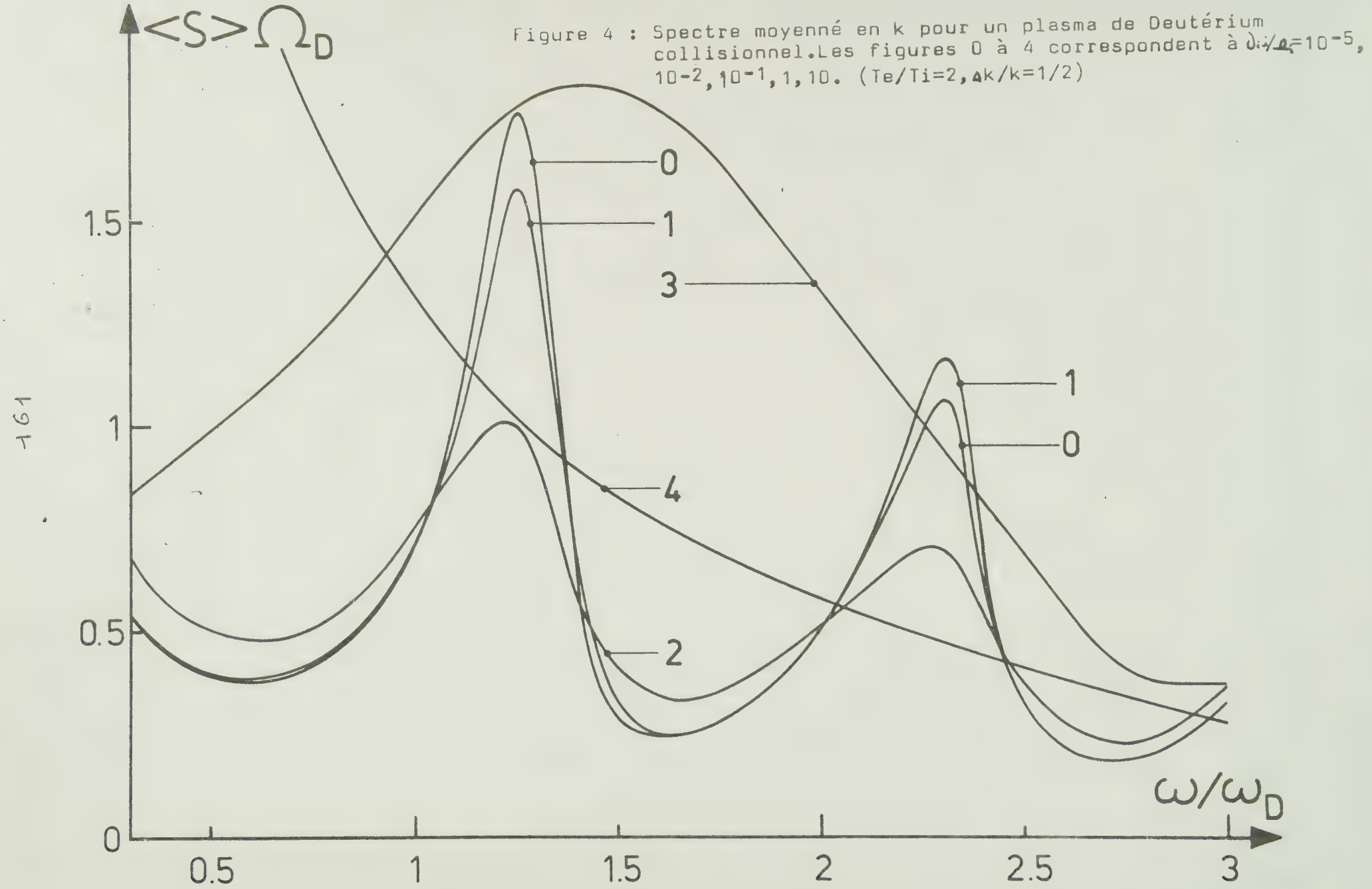
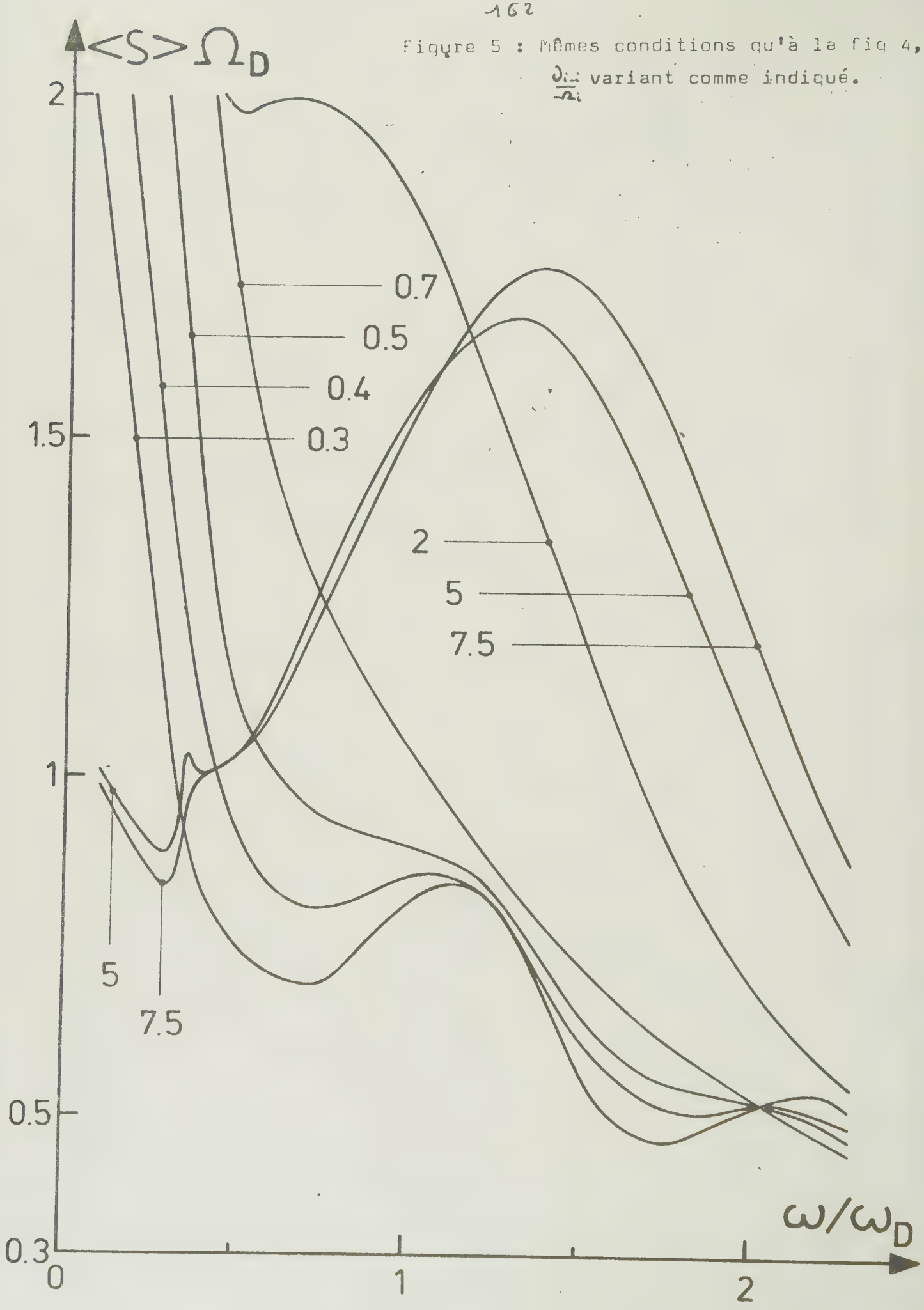


Figure 4 : Spectre moyenné en k pour un plasma de Deutérium collisionnel. Les figures 0 à 4 correspondent à $\nu_i/\omega_r = 10^{-5}$, $10^{-2}, 10^{-1}, 1, 10$. ($T_e/T_i = 2$, $\Delta k/k = 1/2$)

Figure 5 : Mêmes conditions qu'à la fig 4, $\frac{\delta_i}{\pi_i}$ variant comme indiqué.



Modèle Fokker-Planck.

Le modèle Fokker-Planck est mieux adapté aux cas des collisions coulombiennes que le modèle précédent.La démarche consiste à rajouter un second membre à l'équation de Vlasov qui soit sous la forme: $\left(\frac{\partial f_s}{\partial t}\right)_{coll} = \frac{\partial}{\partial v_i}\left(-A_i f_s + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v_j}(B_{ij} f_s)\right)$ (5)

où Ai et Bij sont des fonctionnelles compliquées de la fonction de distribution f à priori ,représentant la friction et la diffusion .On se limitera ici à un modèle Fokker-Planck linéarisé tel que celui considéré par Dougherty (13) ou Bernstein et Lénard(17) (un modèle plus général est par exemple celui de (12)).Le lien entre le modèle Fokker-Planck et le modèle BGK a été remarqué par Porkolab (15) pour un plasma magnétisé (le critère est le raccord des deux modèles pour $(k_\parallel v)^2$ avec application du modèle FP pour $(k_\perp \rho_s)^2 \ll 1$). Un lien plus étroit a été fait par Grewal(16) mais dans le cas d'un champ nul.Quoiqu'il en soit on peut démontrer une relation étroite entre ces deux modèles et on va se contenter ici d'un critère quantitatif montrant que la condition sur la fréquence de collision est plus sévère dans le cas FP pour assurer l'existence des modes ioniques.On écrit formellement à l'annexe 2 le facteur de forme dans ce modèle collisionnel en faisant (13) le choix le plus simple pour les coefficients Ai et Bij conservant le nombre de particules et l'impulsion-energie.l'équation (2) se réecrit alors:

$$\left(\frac{\partial f_s}{\partial t}\right)_{coll} = \nu_s^* \left(\frac{\partial}{\partial \bar{v}}\left(\bar{v} + \frac{v_s^2}{2}\frac{\partial}{\partial \bar{v}}\right) f_s\right) \qquad (6)$$

(v_s est la vitesse thermique des particules s)

La solution pour les différentes quantités intéréssantes se ramènent à l'évaluation d'une intégrale simple faisant intervenir une intégrale de Gordeyev généralisée (voir l'annexe2) définie

par: $$G^{*}_{\frac{\omega}{\Omega_s}}(k_{//}, k_\perp, \nu_s^*) = -i\frac{\omega}{\Omega_s}\int_0^\infty e^{i\omega t}\, e^{-\phi_s^{\nu_s}(t)}\, dt \qquad (7)$$

avec $$\phi_s^{\nu_s}(t) = \frac{V_s^2}{2}\left\{\frac{k_{//}^2}{\nu_s^{*2}}\left(\nu_s^* t - 1 + e^{-\nu_s^* t}\right) + \frac{k_\perp^2}{\nu_s^{*2}+\Omega_s^2}\left(\frac{1-\left(\frac{\nu_s^*}{\Omega_s}\right)^2}{1+\left(\frac{\nu_s^*}{\Omega_s}\right)^2} + \nu_s^* t - e^{-\nu_s^* t}\cos(\Omega_s t + \gamma)\right)\right\} \qquad (8)$$

$$\gamma = 2\arctg\left(\frac{\nu_s^*}{\Omega_s}\right) \qquad (9)$$

Un critère qualitatif consiste alors, sans chercher à intégrer numériquement l'expression compliquée du facteur de forme, à dire que les modes seront des excitations bien définies si l'exponentielle qui intervient dans l'intégrale de Gordeyev généralisée a un argument petit : on prend la valeur à 1/e comme un facteur de coupure, la figure 6 montre l'allure de l'argument de l'exponentielle en fonction de l'angle de propagation et de la fréquence de collision ν_s^*/Ω_s. Un critère approché dans le cas de la propagation strictement perpendiculaire est: $\nu_i^* \ll \inf(\Omega_i, \frac{\Omega_i}{(k_\perp\rho)^2})$: si cette condition est réalisée on peut alors négliger les collisions ion-ion. On voit que si les collisions ion-ion deviennent importantes elles commençent par affecter les harmoniques d'ordre les plus élevées du spectre (on rappele que la valeur du paramètre $(k_\perp\rho)^*_n$ pour les extrêmas croît exactement comme le numéro n de l'harmonique). Pour l'harmonique un, la plus prometteuse pour une observation, on en conclu qu'il n'y a pas de limitation sérieuse compte tenu de ce que l'on a toujours $\frac{\nu_s^*}{\Omega_s} \ll 1$. Le tableau ci-dessous donne une condition plus sévère pour un angle de propagation variable: on y compare la valeur de l'argument $\phi_s^{\nu_s^*}(t=\frac{1}{\omega_0})$ de l'exponentielle à sa valeur pour $\nu_s^* = 0$: $\phi_s^{\nu_s^*}(t)$ pour un critère de coupure à 1/e.

Conclusion de cette partie: compte tenu de la faible valeur des collisions dans les plasmas de Tokamaks, nous pensons que ces dernières ne constituent pas un handicap sérieux capable de masquer l'observation du spectre de fluctuations.

Remarque: un certain nombre d'auteurs ont étudié de manière généra

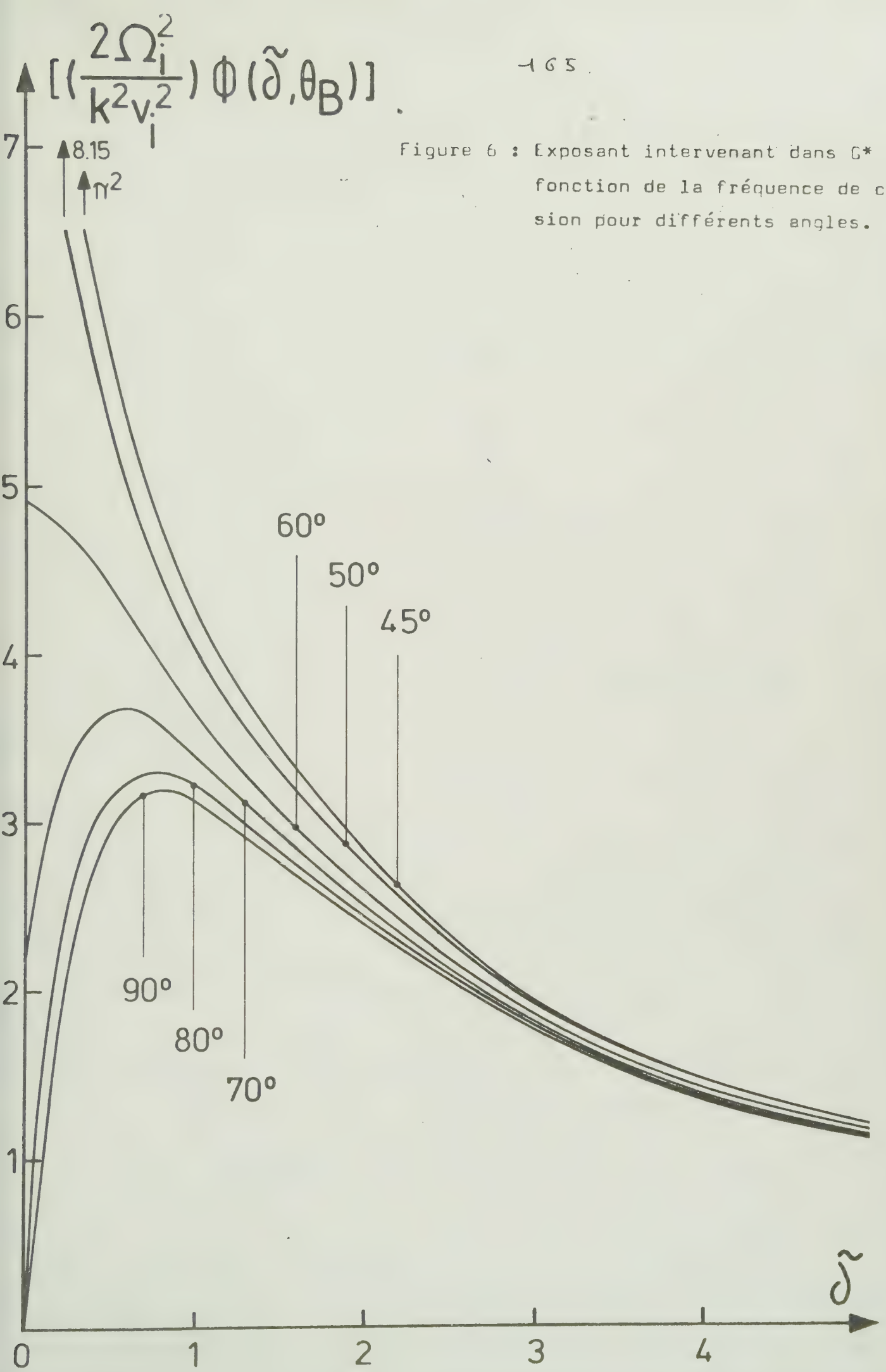


Figure 6 : Exposant intervenant dans G* en fonction de la fréquence de collision pour différents angles.

l'influence des collisions sur les spectres de fluctuations ,on trouvera une ébauche de bibliographie à la fin de ce chapitre. C'est un sujet qui n'a pas encore reçu toute la clarté nécéssaire.

θ_B	70°	75°	80°	85°
$\frac{\lambda_{s(=\frac{1}{e})}^{*}}{\lambda_s}$	81^{-2}	61^{-2}	51^{-2}	41^{-2}

On a porté sur les figures 7 et 8 respectivement le résultat du calcul BGK pour des collisions ion-neutre (réf 3) et du calcul FP (réf16) pour des collisions coulombiennes (ion-ion) .L'analogie de ces deux figures nous a conduit a faire le calcul BGK, cette fois en champ non-nul (B≠o).Etant donné qu'il est possible de décrire le modèle de FP en termes de probabilité de transition du mouvement brownien qui ne dépend pas de la nature de la trajectoire de la particule (B nul ou non) on a le sentiment que le calcul est faisable dans cette conditions (un autre argument est que la fonction de Green permettant de résoudre l'équation et qui conduit aux fonctions G* utilisées par Dougherty(13) est la même que celle qui est solution de la même équation en champ magnétique nul) (il n'y a pas de contradiction cependant dans les résultats car il y a équivalence des modèles BGK et FP si on utilise un modèle BGK qui conserve le nombre de particules et non pas le modèle BGK purement phénoménologique)

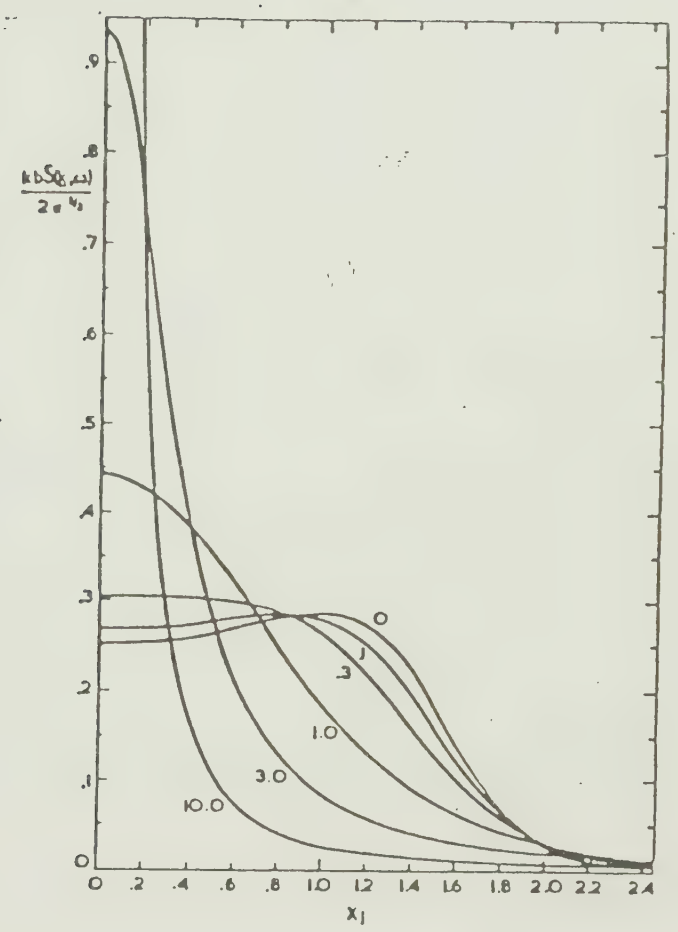
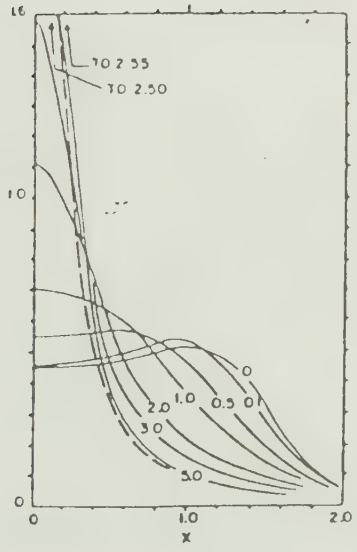


Figure 7 : Modèle BGK mais il s'agit de collision avec les neutres: $\psi_i = \nu_i / k v_i$, $\psi_e = \psi_i / 10$

ψ_i croît comme indiqué sur la figure.

B=0, Te/Ti=1 (réf 3).

$x_i = \omega / k v_i$ en abscisses.



igure 8 : Modèle Fokker-Planck

B=0, Te/Ti=1

$p_i = \nu_i / k v_i$ varie .

(réf 16).

2. Influence du cisaillement des lignes du champ magnétique.

Ce phénomène propre à la géométrie particulière des "Tokamaks" est rappelé à la figure 9 .On peut se représenter le champ B comme étant un champ hélicoidal enroulé sur le tore:

$$\bar{B} = B_t \bar{e}_t + B_p \bar{e}_p \quad (10) \qquad \varphi = \int \frac{r B_t}{R B_p} d\theta \simeq \theta q(r) + \alpha\left(\frac{r}{R}\right) \quad (11)$$

q(r) est le facteur de sécurité fonction décroissante de r.
Le paramètre qui caractérise le cisaillement des lignes de B peut être défini par :$L_s = \frac{R}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{q(r)}\right)\right]^{-1}$. (12)
Ce cisaillement est généralement considéré comme un facteur "stabilisant" pour les excitations.Il convient cependant d'être prudent en envisageant la situation d'espèce(exemple pour les ondes de dérive,voir les références 33,34).

Ce que serait un traitement rigoureux.

Une méthode rigoureuse consisterait à résoudre l'équation des trajectoires pour le champ magnétique donné par:

$$B_t = B_0(r=0)\,\frac{1}{1 - r/R\cos\theta} \quad (13)$$

que l'on peut approximer par: $B_t = B_0\left(1 + \cos\left(\frac{r}{qR}\right)\frac{r}{R}\right) = B_y$ (14)
et $B_p = r/qR\, B_t = B_y$ (15)
Il faudrait ensuite résoudre Vlasov avec ce champ toroidal et intégrer sur les trajectoires pour trouver la fluctuation de densité.Rien que ces premières étapes conduisent à des calculs tout à fait inextricavles pour nos ondes pour lesquelles on doit garder absolument les corrections de rayon de Larmor fini car ici $k\rho \underline{v} 1$ .Même les simplifications de la littérature (35 à 36 par exemple) ne facilitent pas la résolution.
En supposant que l'on ait résolu les problèmes précédents ,il faut ensuite se poser le problème essentiel de la manière de prendre la moyenne statistique dans un plasma inhomogène.

Modèle en tranches.

On peut alors traiter un modèle simplifié qui consiste à découper le plasma en tranches("slab model").le champ magnétique dans cette géométrie plane est le suivant:

On admet que l'on est autour de x=o et on developpe pour un angle $\theta \simeq \pi/2$:

$$B_z = B_0\left(1 + \frac{xy}{qR^2}\right) \qquad B_y = B_0\left(1 + \frac{xy}{qR^2}\right)\frac{y}{qR} \qquad (16)$$

(voir la figure 10)

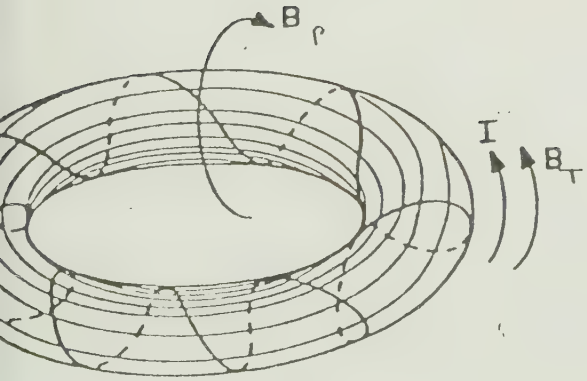
On admet que le plasma est faiblement inhomogène et il est alors possible d'étendre la validité du modèle des particules test en faisant une approximation de type WKB.Ce traitement a été justifié par Kent et Taylor (40) et a été appliqué,par exemple, pour calculer des taux d'amplification convectif pour le transport anormal observé dans les Tokamaks et spéculativement attribué aux ondes de dérive((37) à (39)).On en dit un mot plus bas.

Reprenant alors le traitement prescrit par Sperling (41),on utilise l'approximation suivante pour le champ magnétique:

$$\bar{B} = B_0\,\bar{y} + B_0\frac{x}{L_s}\,\bar{y} \qquad (17)$$

Les gradients sont pris dans la direction x,et Ls a été défini plus haut.

On s'intéresse au cas : $k_{//} \ll k_{\perp}$,et on fait les substitutions:



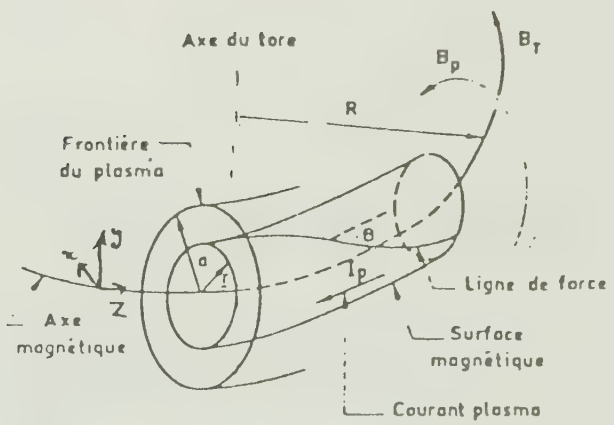


Schéma de principe des configurations fermées. Pour la compréhension, l'angle θ que fait la ligne de force avec l'axe magnétique a été très fortement exagéré. En réalité, la ligne de force tourne 2 à 3 fois autour de l'axe du tore pour une révolution autour de l'axe magnétique.

Figure 9 .

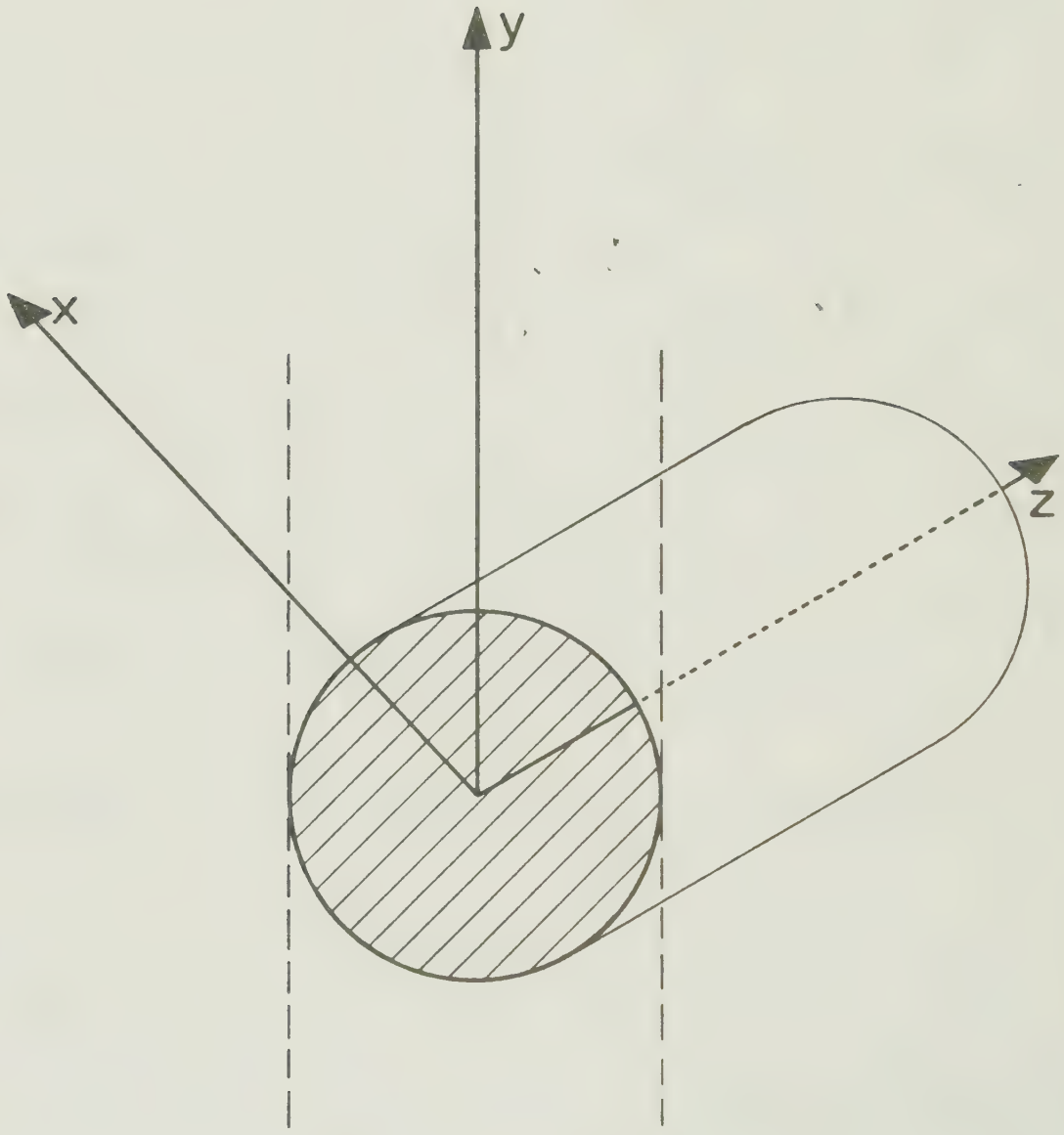


Figure 10 : Géométrie utilisée pour le modèle en tranches.

suivantes pour les composantes du vecteur d'onde:

$k_{//} \to k_y + k_y x/L_s$ $(k_x \neq 0)$ (18) $\quad k_y^2 \to k_y^2 - \frac{d^2}{dx^2}$ (19) et $n_s = n_s(0)(1+x^2/L_s^2)^{1/2}$ (20)

où L_s désigne la longueur de cisaillement. On choisit alors un potentiel de la forme:

$$\phi(\vec{r},t) = \phi(x)\, e^{i\omega t} e^{i k_y \cdot y} e^{i k_z \cdot z} \quad (21)$$

l'équation différentielle à résoudre s'écrit alors:

$$\left\{ k_y^2 - \frac{d^2}{dx^2} + k_z^2(x) + \sum_s k_{ds}^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Gamma_n(\Lambda_s) e^{-\Lambda_s} (1 + \zeta_{os}(x) Z(\zeta_{ns}(x))) \right\} \phi(x) = 0 \quad (22)$$

Remarque: On a eliminé ici la variation en 1/R du champ toroidal qui conduit à un effet d'inhomogénéité qui peut être important, mais qui constitue un effet conceptuellement différent de ceux que l'on veut traiter ici et par conséquent on en parlera ailleurs.

on se contente de developper la constante diéléctrique autour de x=0, la correction au premier ordre s'écrivant: (9)

$$\left(\frac{d^2\varepsilon}{dk_y^2}\Big|_{x=0} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{d\varepsilon}{dx}\Big|_{x=0} x^2 - \varepsilon|_{x=0} \right) \phi(x) = 0 \quad (23)$$

à l'ordre le plus bas on écrit: $\begin{cases} k_\perp \to k_y \\ n_s(x) \to n_s(0) \end{cases}$

$$\varepsilon(x=y) = \varepsilon_1 + \Delta\varepsilon \quad (24)$$

$$\varepsilon_1 = 1 + \frac{k_{de}^2}{k_\perp^2} + \sum_{s=i} \frac{k_{ds}^2}{k_\perp^2} \left(1 - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Gamma_n(\Lambda_s) \frac{\omega}{\omega - n\Omega_s}\right) \quad (25)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dk_y^2}\Big|_{x=0} = \frac{1}{k_y^2} + \sum_s \frac{(k_{ds}\rho_s)^2}{2k_y^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\Lambda_s} \frac{\omega}{\omega - n\Omega_s} \left(\Gamma_n + \frac{d\Gamma_n}{d\Lambda_s}\right) \quad (\text{on a utilisé } \varepsilon(x=y) \neq 0) \quad (26)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dx^2}\Big|_{x=0} = -\sum_s \frac{k_{ds}^2}{k_y^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Gamma_n(\Lambda_s) \frac{n\omega}{[\omega - n\Omega_s(0)]^2} \left[\frac{\rho_s(0)}{2L_s^2}\right] \quad (27)$$

ceci conduit à une équation pour le potentiel qui peut se mettre sous la forme canonique des équations cylindriquee paraboliques: $\left[\frac{d^2}{dx^2} - \left(\frac{1}{4}x^2 - a\right)\right]\phi(x) = 0$ (8) $(\text{où } a = n + 1/2)$

On est ainsi conduit à des modes convectifs et parmi les solutions possibles on choisit celles pour lasquelles la propagation de l'energie se fait vers l'extérieur, ceci se traduit par (vers les x croissants)

le terme d'amortissement convectif annoncé:

$$\mathrm{Im}\,\varepsilon^{conv} = -2(n+\tfrac{1}{2}) \sqrt{-\frac{\partial\varepsilon}{\partial x^2}\Big|_0 \frac{\partial\varepsilon}{\partial k_y^2}\Big|_0} \quad \left(-\frac{\partial\varepsilon}{\partial x^2}\Big|_0 > 0 \,,\, \frac{\partial\varepsilon}{\partial k_y^2}\Big|_0 > 0\right) \quad (29)$$

si on a minimisé les termes d'amortissement d'origine cyclotronique ionique et Landau éléctronique, on peut aussi minimiser ce dernier en faisant n=o.

alors on calcule le facteur de forme modifié par cet amortissement supplémentaire: $\mathrm{Im}\,\varepsilon = \mathrm{Im}\,\varepsilon(x=0) + \mathrm{Im}\,\varepsilon^{conv}$

$$\left(\text{avec } \mathrm{Im}\,\varepsilon^{conv} = -(2n+1)\left(\frac{1}{2L_s^2} \sum_s \frac{k_{ds}^2}{k^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n\omega\, n_s(0)\, \Gamma_n(\Lambda_s)}{(\omega - n n_s(0))^2}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{|z_3|} + \sum_s \frac{|k_{ds}^2|}{k_\perp^2} \frac{\rho_s^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\Lambda_s} \frac{\omega}{\omega - n\Omega_s}\right)^{1/2} \times \left(\Gamma_n - \Gamma_{n'}\right)\right)^{1/2}$$

Il est possible de faire une correction phénoménologique du facteur de forme autour de ses maximas en ajoutant le terme d'amortissement convectif.

On constate cependant que le terme $\frac{\partial \omega}{\partial k_y}\Big|_{k_y=0}$ est exactement nul pour les points de vitesse de groupe nulle pour lesquels l'amortissement supplémentaire n'existe donc pas (d'origine convective). Ainsi la situation reste favorable pour les modes que nous avons sélectionnés pour un diagnostic.

Il existe cependant avec ce modèle simplifié, un élargissement de la définition du nombre d'onde parallèle du fait du cisaillement on a: $k_{//} = k_{//}(\omega) + \frac{x}{L_s} k_y$. Une estimation numérique fournit: $(\Delta k_{//})\rho \sim \frac{2\pi\rho}{L_s} \sim \frac{1}{10}$ $(\rho = 2, L_s = 20)$ il faut rajouter ce terme dans la prise en compte des effets de résolution en nombre d'onde.

Validité statistique du modèle WKB.

Il y a deux conditions à réaliser pour calculer les corrélations de densité. D'abord il faut que les longueurs d'inhomogénéité sont grandes devant les longueurs d'onde du problème pour que le traitement WKB ai un sens ; c'est tout a fait le cas ici où il faut comparer les rayons de larmor ρ_i aux longueurs telles que L_s. D'autre part en faisant toujours l'hypothèse d'indépendance statistique pour les particules test on ne pourra prendre la moyenne statistique de la même façon qu'auparavant c'est à dire en faisant l'hypothèse de fluctuations homogènes que si les longueurs de corrélation des fluctuations sont bien inférieures aux longueurs d'inhomogénéité, on peut estimer grossièrement les longueurs de corrélation l_c comme étant de l'ordre de la longeur d'onde de Debye λ_D pour un plasma thermique ; donc non seulement l_c est bien inférieure à L_s mais aussi à ρ_i. On peut donc à l'ordre le plus bas se contenter de faire un developpement WKB sur la constante diélectrique et prendre une moyenne statistique à l'ordre zéro en l_c/L_s de cette quantité perturbée pour évaluer le facteur de structure.

3. Effets négligés, limitation de l'étude.

Il existe de nombreux effets propres aux Tokamaks que l'on a systématiquement négligés jusqu'ici. Il est très difficile de considérer tous ces effets simultanément, aussi va-t'on se borner à résumer leur influence qualitative dans le tableau qui suit. On a "oublié" systématiquement les phénomènes de couplage des modes par des effets toroidaux et l'étude approfondie du rôle des ions piégés sur les instabilités de nature cyclotronique.

R désigne ici une dimension caractéristique de la machine, le grand rayon moyen du tore.

Nature de l'effet	Influence possible	Influence effective	Réf
corrections de géométrie finie	– Condition de "quantification" des nombres d'ondes – modification de la dispersion	négligeable : $\lambda \ll R$	(47) prise en compte de la toroïcité
Anisotropie de Températures	Instabilités possibles	Important pour le cas du chauffage additionnel par injection de neutres énergétiques	Sujet d'études actuelles réf (20) du ch IV
Particules piégées			
– électrons	Inhibition des instabilités utilisant l'effet Landau inverse	Important si le "paramètre de piégeage" est inférieur à l'unité (ce n'est pas le cas en général)	voir (45)
– ions	notamment : fonction de distribution en cône de perte. et instabilités associées	Destabilisation possible des modes	voir (44)
– Electrons "runaway"	– Création d'ondes de plasma électroniques susceptibles de dégénérer paramétrique-ment en ondes cyclotroniques ioniques – Glissement de la fonction de distribution des électrons dans son ensemble, si fort courant présent.	Destabilisation possible par effet Landau inverse	voir (46)
– Inhomogénéités :			
– grad B	Amortissement des ondes par élargissement des zones de résonances cyclotroniques – dépendance spatiale de la fréquence.	Amortissement pour les harmoniques élevées compte tenu des longueurs de gradients	(42)
– grad n – grad T	– Destabilisation en présence de courant – négligeable à l'ordre le plus bas	Important pour les forts gradients	(42), (43) (42)

Conclusion : Il semble que les effets d'inhomogénéité n'affecte pas de manière radicale la mesure que l'on propose, hormis dans quelques cas extrêmes qu'il faudrait évaluer au coup à coup . Ainsi l'inhomogéneité de B peut être conjurée (voir cha VI), et le profils de densité et de courant doivent se conjuguer pour fournir une contribution dominante dans la région centrale du plasma où le rapport Te/Ti est en général constant.

Annexe 1 du chapitre V.

Modidication du facteur de forme en présence de collisions.

Modèle BGK.

Si l'on écrit une équation de Boltzmann :

$$\left(\frac{\partial f_s}{\partial t}\right)_{coll} = -\partial^* (f_s - f_{os})$$

Ceci conduit à l'expression suivante de la constante diélectrique:

$$\varepsilon = 1 + \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{k^2} \int d^3v \; \frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_s}\right) \left(\frac{n\Omega_s}{v_\perp} \frac{\partial f_{os}}{\partial v_\perp} + k_\parallel \frac{\partial f_{os}}{\partial v_\parallel}\right)}{\omega + i\nu_s - k_\parallel v_\parallel - n\Omega_s}$$

$$1 + i\nu_s/n_s \int d^3v \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{J_n^2(k_\perp v_\perp/\Omega_s)\, f_{os}(v)}{\omega + i\nu_s - k_\parallel v_\parallel - n\Omega_s}$$

Dans le cas des distributions maxwelliennes:

$$\varepsilon = 1 + \sum_s \frac{k d_s^2}{k^2} \; \frac{\sum_n \left[1 + \zeta_{os} Z(\zeta_{os})\right] \Gamma_n(A_s)}{\sum_n \left(1 + \frac{i\nu_s}{\omega + i\nu_s} \zeta_{os} Z(\zeta_{os})\right) \Gamma_n(A_s)}$$

Cette fois les ζ_{os} sont complexes:

$$\zeta_{os} = \frac{\omega - n\Omega_s}{k_\parallel v_s} + \frac{i\nu_s}{k_\parallel v_s}$$

En ne retenant que les collisions ion-ion:

$$\varepsilon = 1 + \frac{k d_e^2}{k^2} + \sum_{s=i} \frac{k d_s^2}{k^2} \; \frac{\sum_n \left(1 + \zeta_{os} Z(\zeta_{os})\right) \Gamma_n(A_s)}{\sum_n \left(1 + \frac{i\nu_s}{\omega + i\nu_s} \zeta_{os} Z(\zeta_{os})\right) \Gamma_n(A_s)}$$

On décompose la constante diélectrique en sa partie réelle et sa partie imaginaire: (la normalisation utilisée dans ce calcul est

$$\varepsilon_1 = \frac{k^2}{k d_e^2} \frac{T_i}{T_e} \varepsilon_1 \left(\frac{T_s = i}{T_i}\right)$$

$$\mathcal{R}e(\varepsilon) \frac{k^2}{k d_e^2} = \frac{k d_e^2}{k^2} + 1 + \sum_{s=i} \frac{n_s Z_s^2}{n_e} \frac{T_e}{T_i} \left\{ \sum_n \Gamma_n(A_s) \left\{ 1 + \frac{\omega}{k_\parallel v_s} Z_n(\zeta_{os}) - \frac{\nu_s}{k_\parallel v_s} \right.\right.$$

$$\left. \times Z_i(\zeta_{os}) \right\} \times \sum_{n'} \Gamma_{n'}(A_s) \left(1 - \frac{\nu_s}{k_\parallel v_s} Z_i(\zeta_{os}) + \left\{ \sum_n \Gamma_n(A_s) \left(\frac{\omega}{k_\parallel v_s} Z_i(\zeta_{os}) + \frac{\nu_s}{k_\parallel v_s} Z_n(\zeta_{os})\right) \right\} \frac{\nu_s}{k_\parallel v_s} \right.$$

$$\left. \times \sum_{n'} \Gamma_{n'} Z_n \right\} \times \frac{1}{D_s^2}$$

$$D_s^2 = \left[\sum_n \Gamma_n \left(1 - \frac{\nu_s}{k_\parallel v_s} Z_i(\zeta_{os})\right)\right]^2 + \left(\frac{\nu_s}{k_\parallel v_s}\right)^2 \left(\sum_n \Gamma_n Z_n(\zeta_{os})\right)^2$$

$$\mathrm{Im}\, \varepsilon_1\left(\frac{k^2}{k d_e^2}\right) = \sqrt{\pi} \left\{ \zeta_{oc}\, e^{-\zeta_{oc}^2} + \sum_{s=i} \frac{1}{D_s^2} \frac{n_s Z_s^2}{n_e} \frac{T_e}{T_i} \left\{ \sum_n \Gamma_n \left(\frac{\omega}{k_\parallel v_s} Z_i(\zeta_{os}) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \frac{\nu_s}{k_\parallel v_s} Z_n(\zeta_{os})\right)\right\} \times \left\{ \sum_{n'} \Gamma_{n'} \left(1 - \frac{\nu_s}{k_\parallel v_s} Z_i(\zeta_{os})\right\} - \frac{\nu_s}{k_\parallel v_s} \left(\sum_n \Gamma_n Z_n\right) \left(\sum_{n'} \Gamma_{n'} \left(1 + \frac{\omega}{k_\parallel v_s} Z_i - \frac{\nu_s}{k_\parallel v_s} Z_i\right.\right.\right.\right.$$

C'est cette expression quelque peu laborieuse de la constante diélectrique qui est utilisée dans le nouveau calcul du facteur de forme. La principale modification numérique en dehors de ces manipulations algébriques réside dans l'évaluation de la fonction de dispersion Z . On utilise une méthode "standard " de calcul de Z qui est la suivante:

$$Z(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t-y}\, dt = i\sqrt{\pi}\, \mathrm{erf}(-iy)\, e^{-y^2}$$

(erf est la fonction erreur)

+ $z = x+iy$

+ si $x, y \geq 10$ — $y \geq 2.75$ ou $y \geq 2$ et $x \geq 4$ on utilise un développement asymptotique en fractions continues donné par Faird et Conte (corrigée d'erreur de calcul)

— $x \geq 6.25$ on utilise un développement en fraction rationnelle donné par Abramowitz et Stegun.

$$Z(y) = -y \left(\frac{0.508\,248\,2}{z^2 - 0.275\,255\,1} + \frac{0.091\,751\,71}{z^2 - 2.724\,745} \right)$$

— développement en série de Taylor :

$$Z = \sum_{i=0} T^{(i)}$$ autour du point z_0 dans la grille $\begin{cases} x = 0(0.5)6 \\ y = 0(0.5)2.5 \end{cases}$

en utilisant : $T^{(0)} = Z(y_0)$

$T^{(1)} = (y - y_0)\, Z'(y_0)$

$\vdots$

$$T^{(n+2)} = \frac{-(z-z_0)\, y_0\, T^{(n+1)} + (z-z_0)\, T^{(n)}}{1+n/2} \qquad \text{si } n \geq 10$$

+ si $y < 0$, $x > 0$ $\quad Z(x - i|y|) = 2\sqrt{\pi}\, e^{|y|^2 - x^2} (-\sin 2x|y| + i \cos 2x|y|) - \overline{Z(x+i|y|)}$ (1)

+ si $x < 0$ $\quad Z(-|x| + iy) = -\overline{Z(|x| + iy)}$

le choix des conditions aux limites est fait pour trouver les mêmes valeurs que Faird et Conte sur une grille $x = \pm 0(0.2)7$, $y = 0(0.2)4$ à 10^{-6} près.

si $y < 0$ l'erreur de calcul est dominée par le dernier terme de l'expression (1) à mieux que $2\,10^{-6} \times 2\sqrt{\pi}\, e^{|y|^2 - x^2}$.

On constate une altération progressive du spectre lorsque le paramètre augmente. Tout d'abord les maximas se déplacent vers les basses fréquences et leurs amplitudes décroissent jusqu'à un complet "aplatissement" si $\frac{\delta_s}{\Omega_s} \gtrsim 0.5$ (ce qui correspond pour la première harmonique au fait qu'alors $\omega_{1,s}^* \to \Omega_s$)

On peutprédire très simplement le seuil et le décalage basse fréquence des sommets en dessous duseuil par des corrections différentielles:

on ne retient que approchée autour de $k_{//}=0$.

$$\varepsilon(k_\perp, k_{//}=0, \omega) = 1 - \sum_s \frac{k_\perp d_s^2}{k_\perp^2} \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{J_n(\Lambda_s)\, n\Omega_s}{\omega + i\delta_s - n\Omega_s} \Big/ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\Lambda_s) \frac{\omega - n\Omega_s}{\omega + i\delta_s - n\Omega_s} \right)$$

On voit sur cette expression que le décalage réel en fréquence est du second ordre par rapport au paramètre de developpement δ_s / Ω_s .

Un traitement différentiel fournit: $\varepsilon = \varepsilon^* + \varepsilon_{coll}$ avec $\varepsilon^*(\omega_{ns}^*) = 0$

$$\omega = \omega_{ns}^* - \frac{\partial_R \varepsilon_{coll}}{\partial_R \varepsilon^* / \partial \omega}\Big|_{\omega=\omega_{ns}^*} \qquad \omega = \omega_{ns}^* - \sum_s \delta_s^2 \frac{k d_s^2}{k_\perp^2} \frac{\sum_n J_n\, n\Omega_s}{(\omega - n\Omega_s)^2} \Big/ \sum_{n'} \frac{J_{n'}}{(\omega - n'\Omega_s)}$$

β_s

et dans le cas particulier d'une seule espèce ionique:

$$\left(\text{où } \beta_s = \sum_s \frac{k d_s^2}{k_\perp^2} \left(\sum_n \frac{J_n\, n\Omega_s}{(\omega - n\Omega_s)^2} \Big/ \left(\sum_n J_n(\Lambda_s) \right)^2 \right) \right)$$

$$\frac{\omega - \omega_{ni}^*}{\Omega_i} = -\frac{\partial_i^2}{\Omega_i^2}(k\rho_i) \qquad \text{car} \sum_{n'} \frac{J_{n'} e^{-\Lambda_s}}{\omega - n'\Omega_s}\Big|_{\omega_{ni}^*} \gtrsim \frac{T_i}{T_e} \text{ pour } k \ll k_d$$

Le tableau ci-dessous résume les valeurs prédites et celles qui sont observées pour le décalage en fréquence de l'harmonique un d'un plasma de Deutérium:

10^{-2}	10^{-1}	0.15	0.2	0.3	0.4	0.5	δ_i/Ω_i
$< 5 10^{-2}$	$< 5 10^{-2}$	$\gtrsim 5 10^{-2}$	$7 10^{-2}$	$8 10^{-2}$	$1.7 10^{-2}$	seuil dépassé	$\left(\frac{\omega^* - \omega_{col}}{\Omega_i}\right)_{mesuré}$
$\gtrsim 10^{-4}$	10^{-2}	$2.3 10^{-2}$	$4 10^{-2}$	$9 10^{-2}$	$16 10^{-2}$	$(25 10^{-2})$	$\left(\frac{\omega^* - \omega_{col}}{\Omega_i}\right)_{calc}$

Annexe 2 du chapitre V.

Prise en compte des collisions par un modèle Fokker-Planck.

l'équation pour un modèle linéarisée s'écrit:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} = -\frac{\partial}{\partial v_i}\left(A_i f + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v_j}(B_{ij} f)\right)$$

Ceci est valable pour des paramètres d'impact grand devant la distance entre particules et petit davant la longueur de Debye.

De plus $\frac{1}{\partial_s^*}$ est le temps au bout duquel la vitesse d'une particule thermique change de manière appréciable (on peut prendre alors la valeur donnée par Spitzer(7)).On choisit une friction $A_i = -\partial_s^*(v_i - \bar{u}_i)$ (en incluant une vitesse de dérive $\bar{u}$ possible) correcte pour les particules de faible vitesse .L'approximation la plus simple pour les Bij consiste à choisir ce coefficient de diffusion isotrope(ce sera plausible si le rayon de Larmor est très supérieur à la longueur de Debye ,ce qui est en général le cas)

On peut alors démontrer lesréeultats suivants (13) pour les susceptibilités :

$$\chi_s(\bar{k},\omega) = \frac{k\lambda_s^2}{k^2}\left(1 - G^*_{\frac{\omega}{n_s}}(k_{11}, k_\perp, \partial_s^*)\right)$$

avec G définie par: $G^*_{\frac{\omega}{n_s}} = -\frac{i\omega}{n_s}\int_0^\infty e^{i\omega t} e^{-\phi_s^*(t)}\,dt$

$$\phi_s(t) = \frac{V_s^2}{2}\left(\frac{k_{11}^2}{\partial_s^{*2}}(\partial_s^* t - 1 + e^{-\partial_s^* t}) + \frac{k_\perp^2}{\partial_s^{*2} + n_s^2}\left(\frac{1 - \left(\frac{\partial_s^*}{n_s}\right)^2}{1 + \left(\frac{\partial_s^*}{n_s}\right)^2} + \partial_s^* t - e^{-\partial_s^* t}\cos(n_s t - \chi)\right)\right)$$

$\chi = 2\,\mathrm{Arctg}(\partial_s^*/n_s)$

en champ magnétique nul on a :

$$\phi_s(t) \simeq \frac{V_s^2 k^2}{2\partial_s^{*2}}\left(e^{-\partial_s^* t} + \partial_s^* t - 1\right)$$

On peut alors calculer la densité spectrale de fluctuations en utilisant par exemple la formule suivante:

$$S_e(\bar{k},\omega) = \langle |n_e^{neutre}|^2\rangle \left|1 + \frac{\chi_i}{\varepsilon}\right|^2 + \langle |n_i^{neutre}|^2\rangle \left|\frac{\chi_e}{\varepsilon}\right|^2$$

avec $\langle |n_s^{neutre}|^2\rangle = \frac{n_s}{2\pi}\,\mathrm{Re}\left\{\int_0^\infty e^{i\omega t - \phi_s^*(t)}\,dt\right\}$

Si l'on veut utiliser le critère d'amortissement des résonances choisi dans le paragraphe un de ce chapitre, c'est à dire une coupure des modes correspondant au facteur 1/e de l'exponentielle définie ci-dessus, on fait l'approximation suivante: l'intégrand t est pris égal à l'inverse de la fréquence des modes: $t \sim \frac{2\pi}{\omega_{ns}}$, $\omega_{ns} \simeq n\Omega_s$

Si on s'intéresse plus particulièrement à l'harmonique un, l'argument $\phi_s(t)$ de l'exponentielle s'écrit: $\delta_s^* = \delta_s/k_z$

$$\phi_s\left(t = \frac{2\pi}{\Omega_s}\right) = \frac{k^2 v_s^2}{2\Omega_s^2}\left\{\frac{\omega^2\Theta_s}{\delta_s^{*2}}\left(2\pi\delta_s^* - 1 + e^{-2\pi\delta_s^*}\right) + \frac{k^2\Theta_s}{1+\delta_s^{*2}}\left(\frac{1-\delta_s^{*2}}{1+\delta_s^{*2}}\left(1-e^{-2\pi\delta_s^*}\right) + 2\pi\delta_s^*\right)\right\}$$

Pour les ondes qui nous intéressent dans un plasma de Deutérium l'angle de propagation (K,B) peut prendre les valeurs: $45° < \Theta_B < 88°$

Les conclusions sont rapportées dans le tableau du chapitre V, &1 et sur la figure 6 .

Références du Chapitre V

(1) Tfr Group ,Nuclear Fusion, 15,1053 (1975).

(2) P.L. Bhatnagar,E.P Gross,M. Krook,Phy.Rev 94,511 (1954).

(3) J.P Dougherty,D.T Farley,J. of Geophysical Research 68,5473 (1963) A Theory of Incoherent Scattering of Radio Waves by a Plasma.

(5) N.D'Angelo ,R.W Motley, Phy; of Fluids,11,422 (1963).

(6) A.Y Wong,O. Judd,F. Hai ,Phy.Letters ,21,157 (1966).

(7) L.Spitzer Jr,Physics of Fully Ionized Gas J. Wiley,New York (1962).

(8) O.Theimer,A.N Sandalov,Phy.of Fluids,22,488 (1979).
voir aussi le cas où la fréquence de collision est une fonction linéaire de la vitesse:O.Theimer,Y.K Behl,23,292 (1980)

(9) O.Theimer,A.N Sandalov,M.M Theimer,Phy.of Fluids 23,931(1980

(9b) C.T Dum,T.H Dupree,Phy.of Fluids ,13,2064 (1970).Voir aussi l'étude pour le cas des instabilités basses fréquences de T.H Dupree,Phy.of Fluids,9,1773 (1966).

(10) G.Benford,N. Rynn,J.J Thomson ,W.S Williamson,Phy.of Fluids 17,1001(1974).

(11) D.R Dakin,T. Tajima,G. Benford,N. Rynn,J.Plasma Physics 15,P.175-195 (1976).

(12) M.N Rosenbluth,Mc Donald, Judd,Phy.Rev 107,1 (1957).

(13) J.P Dougherty ,Phy.of Fluids,7,1788 (1964).

(14) A.M Levine,A.F Kuckes,Phy.of Fluids,9,2963(1966).Voir aussi si B=0, l'étude de A.F Kuckes ,Phy.of Fluids,7,511(1964).

(15) M. Porkolab,Phy.of Fluids,11,834(1968).

(16) M.S Grewal,Phy.Rev 136,A1181(1964).

(17) A. Lenard,I.B Bernstein,Phy.Rev 112,1456 (1958).

(18) D.T Farley,J.of Geophysical Research 69,197 (1964).

Petite revue très brièvement commentée sur la prise en compte de collisions pour le calcul des fluctuations dans les plasmas.

Très modestement ,il s'agit plutôt ici d'une ébauche de bibliogr-phie sur la question et non d'une véritable revue.
Ce sujet des collisions n'a cependant pas reçu un traitement absolument général dans les plasmas en raison de sa complexité et une certaine confusion continue à régner sur les modèles collisionnels.
par exemple,certains auteurs ont prédit (réf 19 à 21) que l'effet des collisions sur le spectre à B=0,était de renforcer les épaulements acoustiques ioniques,alors que d'autres (par ex,réf 22 à 24)prédisent que ces résonances soient réduites.
ceci serait peut-être dû au fait que la deuxième série d'auteurs utilise un modèle collisionnel ne conservant pas la quantité de mouvement (20), les auteurs de la réf 20 utilisent un modèle BGK conservant n,P,E,mais néglige les collisions entre particules d'espèce differente.

(19) D.F Dubois,V. Gilinsky,Phy.Rew A,133,1317 (1964);Incoherent scattering by Plasmas.II.Effect of Coulomb Collisions on Classical Plasmas.

(20) E.M Leonard,R.K Osborn,Phy.Rew A,8,2021 (1973);Light Scattering from Collision-Dominated Plasmas.

(21) E.J Linnebur,J.J Duderstadt,Phy.of Fluids,16,665 (1973). Theory of Light Scattering from dense Plasmas.

(22) M.S Grewal,Phy.Rew A,13 , 86 (1964).

(23) E.C Taylor,G.G Comisar,Phy.Rew a,2379 (1963);Frequency Spectrum of Thermal Flucuations in Plasmas.

(24) C.S Cheng,J.A MacLennan,Phy.of Fluids,15,1285 (1972). Scattering Function of a Soft Collision Plasma.

un article pour comparer modèle BGK et Fokker-Planck.

(16) M.S Grewal,Phy.Rew A,136,1181 (1964).

quelques articles sur l'effet des collisions sur les ondes:

(25) Ono,R.M Kulsrud,

(25b) Tsang-Yi Huang,L Chen,A. Hasegawa,Phy.of Fluids,17,1744 (1974);Collisional Effects on ion-acoustic Waves in a non equilibrium plasma.

(26) A.Y Wong,N.D'Angelo,R.W Motley,Phy.Rew.Letters,9,415 (1962) Propagation and Damping of Ion Acoustic Waves in Highly Ionized Plasmas.

(27) B.Milic,Phy.of Fluids,15,1630(1972);Spontaneous Excitation of the Long-Wave Ion-Cyclotron and Ion-Acoustic Oscillations in Fully Ionized Plasmas.

(28) R.M Kulsrud,C.S Shen,Phy.of Fluids,9,177 (1966);Effect of Weak Collisions on Ion Waves.

---

(29) T. Hagfors,R.A Brockelman,Phy.of Fluids,14,1143 (1971); Theory of Collision Dominated Electron Density Fluctuations in a plasma with Applications to Incoherent Scattering.

(30) O.Theimer,R.Theimer,Plasma hysics,15,837 (1973);Effect of Collisions on the Random Elecyron Density Fluctuations in a Plasma.

(31) P.Uddholm,L. Stenflo,Physica,22,71 (198);Effects of Collisions on Density Fluctuations in Plasmas.

sur les collisions ion-electrons voir les travaux de C.T Dum;et notamment:

(32) C.T Dum,Phy.Rew.Letters ,35,947 (1975);Strong-Turbulence Theory and the Transition from Landau to Collisionnal Damping.

(33) J.B. Taylor,Iaea-Cn 35/D10,International Conf on Plasma and contr. Fusion,323 ( ).

(34) N.R. Sathoff,M. Okabayashi,J.A. Schmidt,Phy.of Fluids,18,91 (1979).

(35)a N.A. Krall,M.N. Rosenbluth,Phy.of Fluids,4,163(1961)

b " " ,Phy.of Fluids,5,1435 (1962)

c " " , " ,6,254 (1963)

d " " , " ,8,1488 (1965).

(36)a J. Jukes,Phy.of Fluids,7,1468 (1964).

b W.E Drummond,K.W Gentle,Phy.of Fluids,10,202 (1967).

(37) W.N. Nevins,Liu Chen,Phy.of Fluids,23,1973 (1980).

(38) F.L. Hinton,M.N. Rosenbluth,Phy.of Fluids,23,528 (1980).

(39) R.E. Waltz,W. Pfeiffer,R.R. Dominguez,Phy.of Fluids,23,985 (1980).

(40) A. Kent,J.B. Taylor,Phy.of Fluids,12,209 (1969).

(41) J.L. Sperling,Phy.of Fluids,21,2226 (1978).

(42) J.L. Sperling,F.W. Perkins,Phy.of Fluids,19,281 (1976).

(43) H.W. Hendel,M. Yamada,Phy.Rev.Letters,33,1076 (1974).

(44) D.A. Hitchcock,S.H. Brecht,W. Horton Jr,Phy.of Fluids,20, 1551 (1977).

(45) V. Arunasalam,M. Okabayashi,R.J. Hawryluk,S. Suckewer,Phy. of Fluids,20,95 (1977).

(46) B. Coppi,F. Pegoraro,R.Pozzoli,G. Rewoldt,Nuclear Fusion,1 309 (1976).

(47) R.E. Waltz,R.R. Dominguez,Phy.of Fluids,24,1575 (1981).

CHAPITRE VI

	Pages
REALISATION POSSIBLE DE L'EXPERIENCE.	186
Introduction.	186
1) Rappels sur la diffusion Thomson.	187
Diffusion par un électron.	187
Diffusion par un plasma.	190
2) Méthode de détection de la puissance diffusée.	192
Détection par mélange optique.	192
Angle solide de détection.	194
3) Rapport signal sur bruit et résolution en fréquence.	195
Rapport signal sur bruit.	195
Résolution en fréquence.	196
Enregistrement du facteur de forme.	196
Amélioration du rapport signal sur bruit.	196
4) Résolution en nombre d'onde.	197
5) Critères pour le choix d'une source de rayonnement électromagnétique.	200
6) A-t'on observé les modes cyclotroniques ioniques dans le plasma de TFR ?	205
7) Description d'un dispositif expérimental.	207
Annexe 1 : Calcul de la densité spectrale du courant hétérodyne.	211
Références.	213

VI. Réalisation possible de l'expérience.

Introduction:Nous allons baser la réalisation expérimentale de notre diagnostic sur la diffusion Thomson par les électrons du plasma.On sait que cette méthode s'est déja révélée comme un outil puissant d'analyse en physique des plasmas et on trouve dans la littérature,de très nombreux travaux théoriques et expérimentaux.

La diffusion Thomson se trouve être supérieure aux méthodes utilisant des sondes electrostatiques (celles-ci ne résistent pas aux fortes températures des plasma de fusion,et ont une résolution limitée spatialement par les effets de "gaine") où utilisant la diffusion micro-ondes(elle est limitée par les effets de réfraction du plasma) pour étudier les longueurs qui nous intéressent ici.

Après avoir rétabli les formules qui donnent la puissance diffusée par un plasma sous l'effet d'un rayonement électromagnétique de haute fréquence ,on choisi la méthode de détection la plus appropriée et on discute du choix d'un dispositif expérimental compte tenu des contraintes numériques résultantes de l'étude théorique et des contraintes technologiques.

1) Rappels sur la diffusion Thomson.

a) diffusion par un électron.

Modèle:on suppose qu'un electron est soumis à un champ magnétique statique B_0 ,et de plus à un champ électromagnétique de pompe supposé monochromatique de vecteur champ électrique donné par: $\vec{E}_i(\vec{r},t) = \vec{E}_i^0(\vec{r})\,(e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_i t)} + cc)$

On cherche le champ electrique diffusé par l'electron:si l'on suppose que le champ électromagnétique incident pertu-be peu la trajectoire de l'electron(Wi est en particulier très supérieure à lafréquence cyclotronique dans le champ statique Wce) ,et si on cherche ce champ dans la région de rayonnement (approximation dipolaire) ,alors on obtient en utilisant par exemple les potentiels de Lienard-Wiechert:

$$\vec{E}_s(\vec{R},t) = -\frac{\mu_0 q}{4\pi\rho c}\left\{\frac{\vec{\delta}\wedge((\vec{\delta}-\vec{\beta})\wedge\vec{a})}{(1-\vec{\beta}\cdot\vec{\delta})^3}\right\}_{t=t^*} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\quad \vec{B}_s = \vec{\delta}\wedge\frac{\vec{E}_s}{c} \qquad (1)$$

où t* est le temps retardé: $t^* = t - \rho/c$

la force F exercée sur la particule,valant:

$$\vec{F} = -e(\vec{E}_i + \vec{v}\wedge(\vec{B}_i + \vec{B}_0)) \qquad m = m_0\gamma \qquad \gamma = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} \qquad \rho = |\vec{R}-\vec{r}| \qquad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} - \frac{\vec{\beta}}{m}(\vec{F}\cdot\vec{\beta})$$

a est l'accélération de l'electron:

Dans le cas de l'approximation non-relativiste,on a le résultat suivant: $\beta \ll 1 \qquad \vec{a} \simeq \frac{\vec{F}}{m_0}$

$$E_s(\vec{R},t) = \frac{r_0}{\rho}\left[\vec{\delta}\wedge(\vec{\delta}\wedge\vec{E}_i)\right]_{t^*} \qquad (2)$$

où: $r_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{m_e c^2}$ (3) est le rayon classique de l'electron.

(l'approximation non-relativiste ne semble pas trop mal justifiée pour les plasmas de fusion actuels puisque l'énergie thermique des électrons y est de l'ordre du petite devant l'énergie de repos des particules de l'ordre du Mev ,donc Ve/c $\lesssim$ 6%)

On a négligé au passage Bi devant Ei*v/c et on a aussi écarté le rayonnement propre d'origine cyclotronique de l'électron en oubliant la partie de la force dÛe à Bo (on peut montrer que ceci est justifié si $\Omega_{ce} \ll \omega_i$)

A l'ordre le plus bas le temps retardé s'écrit:

$$t^* = t - \rho_{/c} \simeq t + \frac{\bar{r}\cdot\bar{s}}{c} - R/c \quad (4)$$

la phase qui intervient dans l'expression du champ diffusé est:

$$\varphi_i(t^*) = \bar{k_i}\cdot\bar{r}(t^*) - \omega_i t^* \quad (5)$$

au même ordre d'approximation que pour t*, elle s'écrit:

$$\varphi_i(t^*) = (\bar{k_i} - \frac{\omega_i}{\omega_s}\bar{k_s})\cdot\bar{r}(t) + k_i R - \omega_i t \quad (6) \quad \begin{matrix}\omega_i = k_i c \\ \omega_s = k_s c\end{matrix}$$

On introduit les caractéristiques Ws et Ks du rayonnement diffusé dans la direction ŝ .La conservation de l'impulsion-énergie pour l'interaction entre l'électron et le photon de pompe fournit:

$$\omega_s = \omega_i \quad 1 - \bar{\beta}\cdot\bar{\imath} \,/\, 1 - \bar{\beta}\cdot\bar{s} + (1-\cos\theta)\frac{\hbar\omega_i}{mc^2} \quad (7)$$

î repère la direction du photon incident, ŝ celle du photon diffusé et l'angle Θ est (î,ŝ).Si l'effet Compton est négligeable et v/c<<1 alors Ws ≃ Wi;et la phase φ_i vaut:

$$\varphi_i(t^*) \simeq k_i R - \omega_i t + (\bar{k_i} - \bar{k_s})\cdot\bar{r}(t) \quad (8)$$

On peut donc donc modéliser l'interaction par un processus à trois ondes:l'onde incidente, l'onde diffusée et l'onde différence des deux premières de caractéristiques:

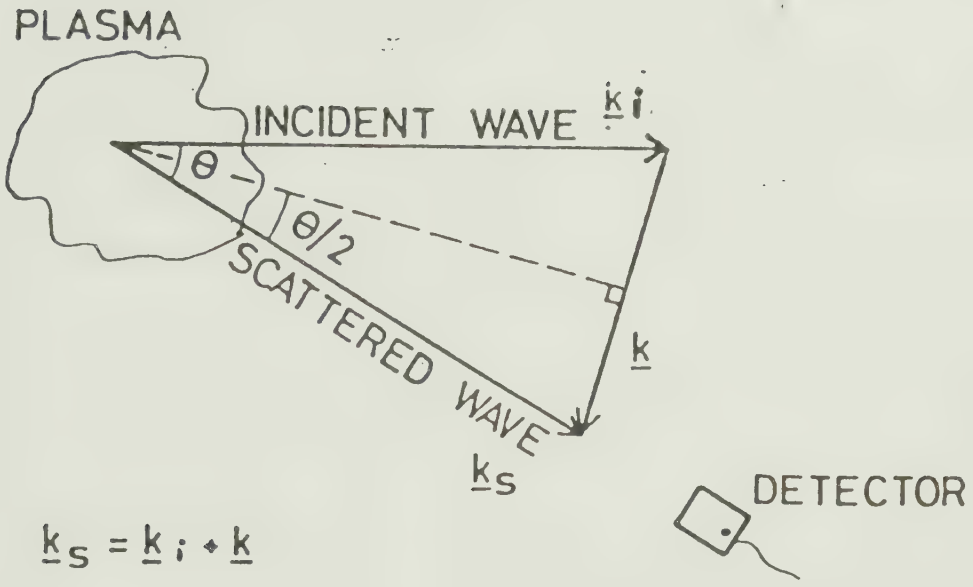
$$\begin{cases}\omega = \omega_s - \omega_i \\ \bar{k} = \bar{k_s} - \bar{k_i}\end{cases} \quad (9)$$

Le vecteur d'onde k doit donc vérifier une relation du triangle qui est isocèle si Ws≃Wi.soit: $k = 2k_i \sin(\theta/2)$ (voir la figure 1) (10)

Le champ électrique diffusé par l'électron est donc:

$$\bar{E_s}(\bar{R},t) = \frac{n_0}{\rho}\,\bar{s}\wedge(\bar{s}\wedge\bar{i_\perp})\,\alpha_2\left\{E_i(\bar{r}) \times \left(e^{i\bar{k}\cdot\bar{r}} - \omega_i t\, e^{i\omega_i\frac{R}{c}}\right)\right\} \quad (11)$$

($\bar{i_\perp}$ est la direction de $\bar{E_i}$: $\bar{i_\perp}\cdot\bar{k_i} = 0$).



$$\underline{k}_s = \underline{k}_i + \underline{k}$$

$$|\underline{k}| = 2|\underline{k}_i| \sin(\theta/2) = \frac{4\pi}{\lambda_i} \sin(\theta/2)$$

Figure 1:

Diagramme vectoriel de la diffusion pour les nombres d'onde.

Cas d'un plasma.

Si l'on considère N électrons dans un volume V, on écrira:

$$\bar{E}_s(\bar{R},t) = \frac{r_0}{\rho} \sum_{i=1}^{N} \bar{E}_s^i(\bar{R},t) \qquad (12) \qquad (\rho = V^{1/3})$$

Introduisant alors la densité par: $n(\bar{r},t) = \sum_{j=1}^{N} \delta(\bar{r} - \bar{r}_j(t))$ (13)

le champ diffusé par les électrons contenus dans le volume de diffusion V et qui sont "visibles" par l'observateur apparaît donc comme la transformée de Fourier spatiale de la densité électronique à condition que le champ incident soit uniforme:

$$\overline{E_s}(\bar{R},t) = \frac{r_0}{\rho} \; \bar{u} \wedge (\bar{u} \wedge \bar{\varepsilon}) \; \mathcal{R}e\left\{ E_i \, e^{i\omega_i\left(\frac{R}{c} - t\right)} \int_V n_e(r,t^*) \, d^3r \, e^{i\bar{k}.\bar{r}} \right\} \qquad (14)$$

On a donc un renseignement direct sur les fluctuations du plasma, on conçoit qu'une analyse spectrale va donner une expression proportionnelle au facteur de forme S(k,ω) précédemment introduit La puissance diffusée se calcule à l'aide du flux du vecteur de Poynting $\bar{S}$ à travers uns surface appropriée: on a, par unité de surface et d'angle solide:

$$\frac{d^2 P_s}{d\Omega} = \bar{S}.\hat{\delta}\, \rho^2 = \frac{\rho^2}{\mu_0 c} \left[\overline{E_s}(R,t)\right]^2$$

La mesure se fait sur un temps T grand devant les temps caractéristiques du plasma, on mesure: $E_s^T(R,t)$

$$\frac{d P_s}{d\Omega} = \frac{\rho^2}{\mu_0 c} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} E_s^{T\,2}(R,t)\, dt \qquad (15)$$

A présent si, revenant à l'expression (14), on écrit la densité comme : $n_e(r,t^*) = n_0 + \delta n_1(r,t^*) + \delta n_2(r,t^*)$ on distingue ainsi trois effets susceptibles de contribuer à la puissance diffusée. Le premier terme donne l'effet d'indice et consiste en la lumière "directe" réemise par les électrons. Le second terme peut caractériser des ondes cohérentes excitées de l'extérieur, souvent à des fins de chauffage du plasma. Enfin l'effet des fluctuations thermiques se traduit par un spectre large en fréquence et en nombre d'onde. On va se concentrer sur ce troisième terme, on sélectionne pour chaque ...

direction d'observation un nombre d'onde de fluctuation $\bar{k}=\bar{k}_s-\bar{k}_i$ et une fréquence $\omega=\omega_s-\omega_i$ qui sont reliés entre eux par la relation de dispersion du milieu lorsqu'il s'agit des modes "naturels" fluctuants du plasma.

Dans le cas toujours où le profil Ei(r) est constant, partant de l'expression(11)on établit la formule classique donnant la puissance diffusée par unité d'angle solide et par unité de fréquence en fonction du facteur de forme des fluctuations: (1)

$$\frac{d^2 P_s}{d\Omega \frac{d\omega}{2\pi}} = r_0^2 n_e \left[\bar{o} \wedge (\bar{e} \wedge \bar{i})\right]^2 L \; P_i \; S(k,\omega) \qquad (16)$$

où le volume de diffusion est défini par l'aire du faisceau ém incident et la longueur de plasma observée : $V = A.L$

Pi est la puissance incidente par unité de surface: $\frac{P_i}{A} = \frac{E_i^2}{\mu_0 c} \frac{1}{2}$ (17)

Le cas des profils inhomogènes pour Ei(r) sera considéré plus loin.

On remarquera que la diffusion est maximale si le terme de polarisation vaut l'unité, ce qui est le cas, pour une polarisation linéaire, si le champ incident est perpendiculaire au plan de diffusion défini par les vecteurs d'onde k_i et ks.

2) Méthode de détection de la puissance diffusée.

On sait détecter le flux d'énergie diffusé par conversion de l'énergie électromagnétique en électrons photo-émis(photo-multiplicateurs) ou photoconducteurs(diodes).

La méthode usuelle est la détection "vidéo" qui permet de faire une analyse spectrale de la raie diffusée à l'aide de filtres optiques appropriés(réseau,Fabry-Pérot) .Cependant devant les composantes basse fréquence des fluctuations temporelles de densité d'origine ionique les méthodes de résolution de profil à mettre en oeuvre deviennent trop difficiles.On peut alors lui préférer des méthodes par mélange optique.

Détection par mélange optique.

On effectue le mélange optique de la lumière diffusée avec une onde de référence appelée "oscillateur local"(ol).Le battement des deux ondes conserve l'information de phase relative et la directivité de la détection sera très sensible à la forme de l'ol sur la surface du détecteur.(figure 2)

Le courant receuilli sur le détecteur est:

$$i(t) = \frac{1}{2}\frac{\eta e}{h\nu}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\int_{A_d} d^2r\ |\bar{E_s} + \bar{E_p}|^2 \qquad (18)$$

où Ad est l'aire du détecteur ,η son efficacité quantique .

Seuls les termes croisés nous intéressent et donnent naissance à une modulation du signal : $(\bar{\omega}\omega_s - \omega_p)$

$$i_M(t) = \frac{1}{2}\frac{\eta e}{h\nu}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left\{\int_{A_d} d^2r\ \bar{E_s}\bar{E_p}^* + cc\right\} \qquad (19)$$

on a ainsi une information sur n(t) et non pas seulement sur son spectre comme avec la détection vidéo;si on se contente de l'information spectrale,on s'intéresse à la densité spectrale du courant "hétérodyne":

$$\Gamma_S(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau}\, d\tau\ \langle i_M(t+\tau)\, i_M(t)\rangle \qquad (20)$$

On obtient alors(se reporter à l'annexe 1 pour le détail du

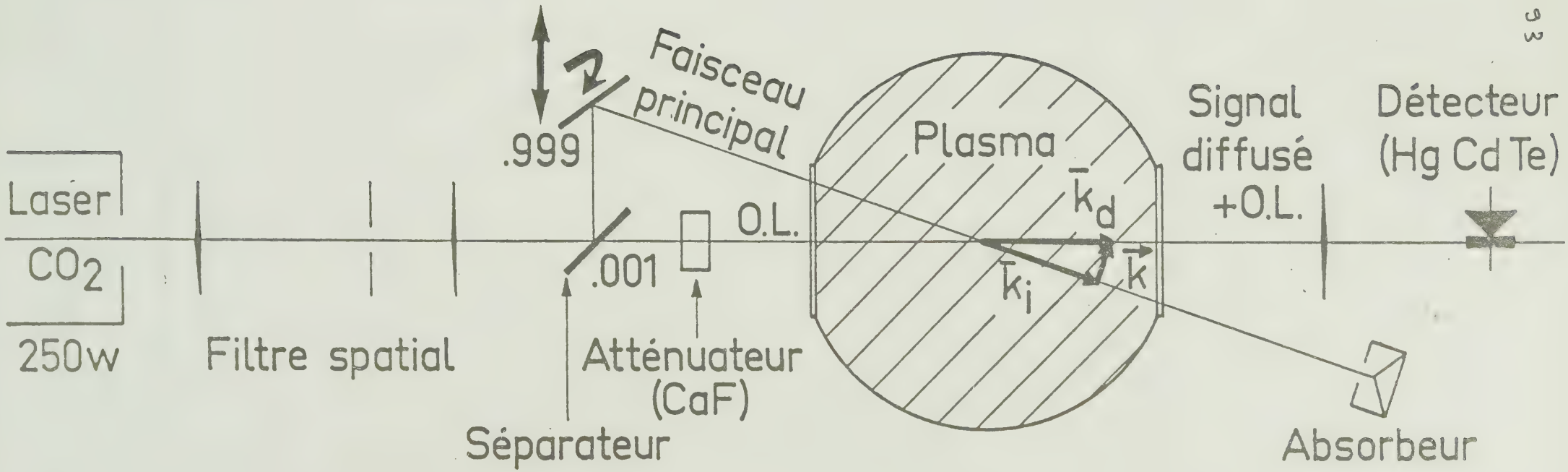


Figure 2: Schéma de principe d'une expérience de diffusion avec une détection"hétérodyne".

calcul):

$$\overline{i_S(\omega)} = \left(\frac{\eta e}{h\nu}\right)^2 P_i P_L \, \Omega_d^2 \, n_e \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \, |W(k_\Delta - k)|^2 \left[S(k, \omega + \omega_\Delta) + S(k, \omega_\Delta - \omega)\right] \quad (21)$$

où l'on a utilisé les notations suivantes: Pi et Pl sont les puissances des faisceaux ém incident et oscillateur local

W(k) est la transformée de Fourier du profil de la détection définie par $U(r) = u_i(r) u_l(r)$ (avec $E_i(r) = E_i u_i(r), \ldots$) :

$$\omega(\bar{k}) = \frac{1}{\bar{E_i} \cdot \bar{E_l}} \int d^3r \, \bar{E_i}(r) \, \bar{E_l}(r) \, e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}}$$

et $\omega_\Delta = \omega_l - \omega_i$, $k_\Delta = k_s - k_i$. L'information sur le facteur de forme est donc convoluée par la resolution W^2 de la mesure. Si les variations de W^2 sont plus rapides que les variations en k de S(k,w), on aura une sélection de S sur le vecteur d'onde de fluctuations choisi k_Δ. Ce sera le cas en général si les faisceaux possèdent des largeurs bien supérieures à la longeur d'onde λ_i. On voit donc apparaître ici une forme convoluée qui justifie (pour des faisceaux ém gaussiens) l'expression que l'on a choisie au chapitre III pour réaliser la moyenne en k du facteur de structure.

Pour ce qui concerne l'aspect temporel on échantillone S aux fréquences $\omega \neq \omega_\Delta$ ce qui donne, en général, un signal à une fréquence voisine de $\pm\omega_\Delta$ lorsque l'on choisi la détection "hétérodyne" ($\omega_\Delta \neq 0, \omega_\Delta \neq \omega$) et à $\pm\omega$ lorsque l'on utilise la détection "homodyne" ($\omega_\Delta = 0$). Comme on a vu que notre spectre était symétrique: en fréquence autour de la fréquence nulle on n'avait gardé qu'un terme intégré pour les fréquences positives.

Remarque sur l'angle solide de détection: on pourrait penser que l'angle d'ouverture du détecteur doit être le plus grand possible. Il n'en est rien car la théorie conduisant à la formule 21 repose sur la diffraction ((4) et (10)), et la cohérence nécessaire requiert d'avoir: $d\Omega = \frac{\lambda_i^2}{A_i}$ et non $\frac{\lambda_i^2}{A_d}$ (où Ad est l'aire du détecteur, λ_i la longueur d'onde incidente, Ai l'aire du faisceau ém). Signalons que cet angle solide est contenu dans l'expres-

-sion intégrée en k intervenant au second membre de 21.

Remarque:il importe d'aligner le plus précisément possible les fronts d'onde de l'oscillateur local et du signal diffusé,ce que l'on traduit par un coefficient "d'hétérodynage" que l'on doit optimiser ,ce que l'on fait dans les expériences préliminaires de calibration.

3) Rapport Signal sur bruit et résolution en fréquence.

On verra que le détecteur à choisir peut être du type photoconducteur,on va évaluer à présent la sensibilité de la mesure.

Rapport Signal sur Bruit

très succinctement ,rappelons les bruits qui peuvent nous gêner:
Une première sorte de bruit est due aux fluctuations de nature quantique du signal auquel peut se superposer le bruit thermique du détecteur lui-même(génération de porteurs de charge par les vibrations du réseau cristallin).
Une seconde sorte de bruit provient de l'emission propre du plasma qui se rajoute au signal à détecter.
Le premier type de bruit est le plus important:le bruit photonique est dominant lorsque $\lambda_i \lesssim \frac{hc}{kT_d}$(où Td est la température du détecteur qui peut être refroidi),alors que c'est le bruit thermique qui domine si: $\lambda_i \gtrsim \frac{hc}{kT_d}$.
Si on se limite à un bruit d'origine quantique,il vaut: $i_b = \eta(\nu)\frac{e}{h\nu}P$ (22)
ceci pour une puissance P tombant sur le détecteur, η étant le rendement quantique.La densité spectrale de bruit associée étant donnée par: $\Gamma_b(\omega) = \eta\frac{e^2}{h\nu}P$ il s'agit d'un bruit blanc à bande passante infinie.

Reprenant l'expression 21 ,le rapport signal sur bruit est :

$$\frac{\Gamma_s(\omega)}{\Gamma_b(\omega)} = \eta\frac{P_i}{h\nu} n_0 r_0^2 \times \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |W(k_s-k)|^2 [S(k,\omega+\omega_s) + S(k,\omega_s-\omega)] \quad (23)$$

Les bruits parasites essentiels de la seconde espèce sont :
-la lumière directe qu'il faut éviter au maximum car elle est sensiblement à la fréquence de la lumière diffusée.

-la lumière propre du plasma:elle contient deux termes importants provenant du "Bremstrahlung" et de l'émission cyclotronique électronique.Ces émissions se font à des fréquences très différentes de celles de notre signal mais peuvent être gênantes par le bruit blanc qui leur est associé.On montre que si la puissance rayonnée par Bremstrahlung est négligeable aux longueurs d'onde qui nous occupent,il n'en est pas de même de l'émission cyclotronique qui peut dépasser la puissance "Thomson".Il convient d'éliminer au maximum le bruit parasite en jouant sur la différence des polarisations des rayonnements cyclotroniques ordinaire et extraordinaire et Thomson.

Dans la suite on se limitera au cas idéal du seul bruit quantiqu

-Résolution en fréquence.

L'analyse spectrale du signal de fluctuations doit se faire en utilisant des filtres de largeur donnée,donc la mesure se fait sur un spectre intégré sur la largeur de bande du filtre.Pour résoudre correctement les extrêmas il faut des filtres suffisamment étroits , la condition étant peu sévère car les maximas ont des largeurs à mi-hauteur de l'ordre de quelques dixièmes de la fréquence cyclotronique ionique.

-Méthode d'enregistrement du spectre.

Il s'agit simplement ici d'utiliser un analyseur de spectre à différents instants judicieusement choisis au cours d'une décharge.(l'analyse temporelle continu du courant donnerait plus d'information sur la dépendance dans le temps de la fluctuation de densité)

-Amélioration du rapport Signal sur Bruit.

On est obligé en général ,vu les faibles signaux à étudier,d'améliorer le signal par intégration,ce qui fournit:

$$S/B = \frac{I_s}{I_s + I_b} (BT)^{1/2} \quad (BT \gg 1)$$

(B est la bande passante du détecteur et T est le temps d'intégration,typiquement: B=1ghz, T=1ms;d'où un "gain" de trois ordres de grandeur)

4) Résolution en nombre d'onde.

Nous allons introduire à présent la notion de résolution en k et justifier le fait que l'on a utilisé une intégration bidimensionnelle dans l'espace des k pour calculer le facteur de forme moyénné.

On se donne comme exemple (qui sera aussi le cas pratique) le cas de faisceaux laser que l'on suppose inhomogènes gaussiens dans les directions transverses au vecteur d'onde de pompe Ki, et homogène dans la direction de Ki.

Ceci est une hypothèse raisonnable pour le laser fonctionnant dans un mode fondamental tranverse electromagnétique (TEM oo) qui est le plus souvent utilisé. Ceci correspondant à un profil gaussien pour le profil du champ électrique: $E_i(\bar{r}) = E_i(0) e^{-r^2/w^2}$

où w est la "taille" des faisceaux.

Si l'on choisi une polarisation du champ électrique linéaire, et si le vecteur d'onde des fluctuations est dirigé dans la direction $\hat{y}$, on a, en reprenant les notations d'Holzauer ( ):

$$\bar{E}_i(\bar{r},t) = \hat{i}\, U_i(r)\cos(\omega_i t - \bar{k_i}\cdot\bar{r} + \psi(z_i)) = \hat{i}\cos(\omega_i t - \bar{k_i}\cdot\bar{r} + \psi(z_i))\, e^{-\frac{y^2 + (z + x\tan\theta/2)^2\cos^2\theta/2}{w(z_i)^2}} E_i(0)$$

$$E_P(\bar{r},t) = \hat{P}\, U_P(r)\cos(\omega_P t - \bar{k_P}\cdot\bar{r} + \psi(z_P)) = \hat{P}\cos(\omega_P t - \bar{k_P}\cdot\bar{r} + \psi(z_P))\, e^{-\frac{y^2 + (z - x\tan\theta/2)^2\cos^2\theta/2}{w(z_P)^2}} E_P(0) \quad (24)$$

$z_i = \hat{k_i}\cdot\bar{r}$ $\quad z_P = \hat{P}\cdot\bar{r}$

(voir la figure 3)

Ui(r) et Ul(r) sont les profils des faisceaux ém, la phase et la taille obéissant aux équations bien connues:

$$tg\{\psi(z_i) - \psi(0)\} = \lambda z_i / \pi w_0^2 \qquad w^2(z_i) = w_0^2\left(1 + \left(\frac{\lambda_i z_i}{\pi w_0^2}\right)^2\right) \quad (25)$$

La fonction de pondération qui intervient dans le calcul du facteur de forme moyénné est alors: $|W(\bar{k})|^2$, $W(\bar{k}) = \iiint d^3r\, U_i(r) U_P(r) e^{-i\bar{k}\cdot\bar{r}}$

$$W(\bar{k}) = \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\theta} w_0^3\, e^{-\frac{w_0^2}{8}\left(k_y^2 + k_z^2 + \frac{4}{\theta^2}k_x^2\right)} \quad (26)$$

W^2 est normalisée à l'unité, on a supposé $w(z_i) \approx w_0$ et confondu $\sin\theta$ avec θ ($\theta \lesssim 30°$) . On peut alors définir un facteur de résolution R par:

$R = \frac{2w}{\lambda_\Delta}$ et obtenir la résolution en nombre d'onde :

$$\frac{\Delta k_y}{k_\Delta} = \frac{\Delta k_z}{k_\Delta} = \frac{2}{\pi R} \qquad \frac{\Delta k_x}{k_\Delta} = \frac{\theta}{\pi R} \quad (27)$$

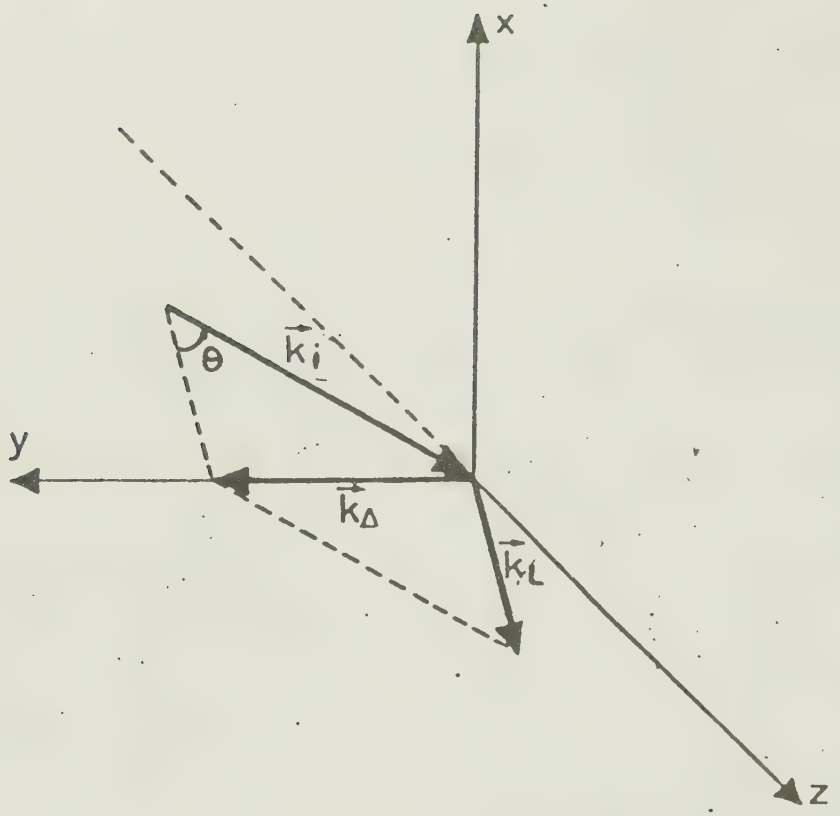


Figure 3 :Géométrie de la diffusion .

soit: $\Delta k_x = \frac{\theta}{w_o}$, $\Delta k_y = \Delta k_z = \frac{2}{w_o}$ et $d\Omega = \frac{\lambda_i^2}{\pi w_o^2}$ (28)

Le volume de diffusion étant: $V = \pi^{3/2} \frac{w_o^3}{4\theta}$, la longueur observée est: $l_v = \frac{4w_o}{\theta}$ qui peut devenir supérieure à la longeur de plasma disponible L. On voit que si l'angle de diffusion : $\theta = 2 \text{Arcsin}\left(\frac{k_s}{2k_i}\right)$ est très petit devant un (quelques milliradiants pour un rayonnement incident à 10.6 μm issu d'un laser CO_2 qui constitue la source la plus avancée en diffusion Thomson, pour un plasma de fusion et une longeur d'onde de l'ordre du rayon de Larmor des ions) alors lá résolution en k est très bonne le long de la direction incidente qui est ici $\hat{x}$, il n'y a donc pas de résolution spatiale le long de $\hat{x}$. Ceci se traduit par une fonction de Dirac suivant $\hat{x}$, donc pratiquement par une intégration bidimensionnelle en k.

On a : $\lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{w_o^2 k_x^2}{2\theta^2}} \simeq S(k_x)$

Si le volume de diffusion devenait infini la résolution en k serait infiniment bonne et on obtiendrait: $W(\bar{k}) \simeq S^3(\bar{k})$.

Si la fonction de pondération est suffisamment étroite, eu égard aux variations en k de $S(\bar{k}, w)$ on obtient alors :

$$\int d^3k \frac{1}{(2\pi)^3} S(k, \omega+\omega_s) |W(k_s - k)|^2 \simeq S(k_s, \omega+\omega_s) \times V \quad (29)$$

où $V = \rho_v w_o^2$

alors : $$\frac{I_s}{I_B} = h \frac{\rho_i}{h\delta} \frac{\lambda_i^2}{\pi w_o^2} \pi r_o^2 \rho_v n_e \left[S(k_s, \omega+\omega_s) + S(k_s, \omega_s - \omega)\right] \quad (29\,\beta)$$

Remarque:

Si l'on choissisait d'avoir une meilleure résolution spatiale on pourrait utiliser une technique récemment proposée par Surko et Slusher qui consiste à corréler les signaux provenant de deux faisceaux de pompe électromagnétiques qui sont croisés dans le plasma pour mieux définir le volume de diffusion (3).

5) <u>Critères pour le choix d'une source de rayonnement électromagnétique</u>.

On peut essayer à présent de déterminer quel est le meilleur laser qui pourrait convenir pour notre expérience compte tenu des exigences théoriques et technologiques auxquelles on doit faire face.

L'existence de facteurs contradictoires obligent à un compromis:

La fréquence de l'onde de pompe doit être grande devant les fréquences caractéristiques du plasma pour éviter des effets de réfraction rendant l'interprétation des mesures délicates. Par ailleurs l'angle solide optimum de collection de la lumière est proportionnel au carré de la longueur d'onde incidente, et comme les mesures souffrent d'un très bas niveau de signal il faut prendre la longueur d'onde maximale compatible avec l'exigence opposée ci-dessus.

Il faut pouvoir observer les fluctuations collectives, ce qui impose un paramètre de diffusion $\alpha = \frac{1}{k_\Delta \lambda_d}$ supérieur à l'unité.

D'un point de vue expérimental il est souhaitable de travailler à des angles de diffusion qui ne soient pas trop petits, car la diffusion "rasante" ($\theta \simeq 0$) oblige à des réglages optiques délicats; on a alors des conditions sévères sur la divergence des faisceaux laser et une grande "pureté énergétique" du profil de faisceau est requise.

Faisons l'application numérique pour estimer la longueur d'onde des fluctuations : elle doit être grande devant la longueur de Debye, elle est de l'ordre du rayon de Larmor des ions pour les maximas de notre spectre:

On a : $n_e = 5.\ 10^{19} m^{-3}$, $Te = 1.5$ Kev, si on veut $W_i \gg W_{pe}$, il faut:

$\lambda_i \ll 4.7$ mm, et $\lambda_d \simeq 40\ \mu m$, tandis que $\rho_i \simeq 1.42$, d'où $\lambda_\Delta = 6.86$mm.

(On a supposé que Ti≃Te/2 pour faire l'application numérique)

La meilleure longueur d'onde incidente semble se situer dans le domaine 50 µm à 1 mm.

Tournons nous à présent vers la technologie des lasers existante dans l'infra-rouge lointain pour déterminer la longueur d'onde incidente réelle.

Estimation de la puissance diffusée:

Choissisons une résolution en k telle que Δk/k =1/2, ce qui impose la taille du faisceau au centre du volume de diffusion: $w_o = \frac{2}{\pi}\lambda_0$ et donc "l'angle solide de détection": $d\Omega = \lambda_i^2/\pi w_o^2$

Pour un spectre thermique, on a $S^*(k,\omega) \simeq 2/\Omega_{ci}$; on utilise alors la formule suivante pour évaluer le rapport signal sur bruit:

$$\frac{I_s}{I_b} = \eta \frac{P_i}{h\nu} \frac{\lambda_i^2}{\pi w_o^2} \pi r_o^2 n_e L \; 2 S^* \qquad L = L f(2a, \rho_v = 4w_o/\theta)$$

On calcule alors le rapport de la puissance diffusée à la puissance incidente qui est donnée par l'expression: $\frac{P_d}{P_i} = \pi r_o^2 n_e L \frac{\lambda_i^2}{\pi w_o^2} \frac{S^* d\omega}{(d\omega = 1 Hz)/2\pi}$ pour différentes transition-laser dans l'infra-rouge.

On évalue ensuite la puissance Pi* nécéssaire pour la puissance de sortie du laser pour avoir un rapport Signal sur Bruit égal à l'unité. (si le bruit quantique était dominant pour toute λ_i).

On présente ensuite la puissance de sortie effectivement disponible, puis la puissance de bruit du détecteur associé, ce qui permet de définir le rapport signal sur bruit actuellement réalisable.

Enfin on donne quelques caractéristiques succinctes des détecteurs associés essentiellement leur nature et leur bruit(NEP). La puissance de bruit est reliée au NEP par : Pb=Nep*B (B est la bande passante du détecteur de valeur typique 1GHz). Cette puissance de bruit est reliée simplement au bruit quantique puisqu'elle s'y identifie* ce qui permet d'estimer le rendement quantique η ($\eta \geq 0.4$ (si $\lambda \leq 114 \mu m$ ici)) est également une valeur typique utilisée dans les applications

* si on prend le NEP théorique $NEP_{théo} \simeq \frac{h\nu_i}{\eta(\nu_i)}$

numériques).Les résultats sont consignés dans la table qui sui

Valeurs numériques utilisées:

a petit rayon du tore ,a=0.2m .

r_0 rayon Thomson de l'électron ,$r_0 = 2.8\ 10^{-15}$m.

Deutérium : $\Omega_0 = 6\ 10^7$rad/s .

$n_e = 5.\ 10^{19}$m^{-3} , $\eta = 0.4$ $\Delta k/k = 1/2$, $\lambda_a^* = 6.86$ mm : $w_0 = 4.36$ mm

Exemple numérique pour un laser CO2 à 10.6 μm et de puissance incidente Pi=300Watts,S/B=4.10^{-2}.

La lecture du tableau permet en définitive de tirer les conclusions suivantes:

Compte tenu des caractéristiques disponibles on peut hésiter entre un laser CO_2 à 10.6μm et un laser HCN à 337 μm.Il semble que la source la plus avancée à retenir soit le laser à CO_2 .

Remarques:noter la différence d'un facteur deux entre la puissance diffusée par unité de bande de fréquence et le courant hétérodyne;ceci est du au repliement des spectres à w et -w dans la détection hétérodyne lorsqu'on ne s'intéresse pas à l'asymétrie du signal.

On ne s'est pas intéressé de façon détaillée au laser pulsé qui constitue peut-être une solution au problème de rapport signal sur bruit faible (le temps d'intégration après détection étant limité à la durée du pulse),mais la technologie à mettre en oeuvre est différente de celle des lasers continus auxquels on se limite ici. (problème de largeur spectrale de l'impulsion)

Compte tenu de l'incertitude sur Ti,il existe une incertitude sur la longueur d'onde des fluctuations(c'est $k p_i$ qui est une "constante universelle") et donc sur l'angle de diffusion.On a représenté sur la figure 4 la variation de l'angle de diffusion avec la température ionique pour une longueur d'onde incidente fixée(10.6 μm).Cet angle est une fonction monotone décroissante de Ti.

Laser	Nature	CO_2 (à gaz)	D_2O pompé par CO_2		D_2O	H_2O		HCN	D_2O	CH_3I	CH_3F	CH_3CH_2	$C_2H_2F_2$	CH_3F pompé par CO_2
λ_i	µm	10.6	66	84	114	118	195	337	385	447	496	648	884	1222
Θ_{diff}	mrad	1.27	7.9	10	13.6	14.1	23.3	40.3	46.1	53.5	59.4	77.6	106	146.7
$\frac{P_d}{P_i}$ $(\propto \lambda_i^2)$ $(\Delta f = 1 Hz)$	–	$6.3\,10^{-24}$	$2.43\,10^{-22}$	$3.9\,10^{-22}$	$7.25\,10^{-22}$	$7.77\,10^{-21}$	$2.11\,10^{-21}$	$6.34\,10^{-21}$	$8.27\,10^{-21}$	$1.1\,10^{-20}$	$1.37\,10^{-20}$	$2.34\,10^{-20}$	$4.36\,10^{-20}$	$8.33\,10^{-2}$
P_i^* $(\propto 1/\lambda_i^3)$ $(S/B)_{vid} = 1$	W	$7.48\,10^{3}$	31	15	6	5.42	1.2	0.23	0.15	0.10	$3.3\,10^{-2}$	$1.3\,10^{-2}$	$9.36\,10^{-3}$	$4.9\,10^{-3}$
P_i	W	670		670		600	350	133	1 MW (pulsé $\tau = 1 \mu s$)	$3\,10^{3}$	62	45	33	10^{-2}
$\left(\frac{S}{B}\right)_{vid}$	–	$2\,10^{-2}$		$8.7\,10^{-2}$		$3.1\,10^{-3}$	$4\,10^{-3}$	0.16		$6.6\,10^{-7}$	–	$2.1\,10^{-2}$	$1.43\,10^{-2}$	$5\,10^{-4}$
Detecteur	Nature	Hg-Cd-Te (ou Ge-Cu) photoconducteur	Schottky	Ge-Be	Schottky	Schottky Ga-As	Si-Sb	Josephson (Nb-Nb) (Nb-Ni)	Schottky	Schottky	Schottky	–	–	Schottky
Aire (A)	cm^2	$4\,10^{-4}$	–	$2.5\,10^{-3}$	–	–	$2.5\,10^{-3}$	–		–	–	–	–	–
NEP (vid)	$W.Hz^{-1}$	$2\,10^{-19}$	$3.3\,10^{-19}$	$3\,10^{-13}$	$3.3\,10^{-19}$	$1.5\,10^{-16}$	$1.5\,10^{-16}$	10^{-17}	$3.3\,10^{-16}$	10^{-16}	–	10^{-16}	$2.1\,10^{-16}$	$3.3\,10^{-16}$

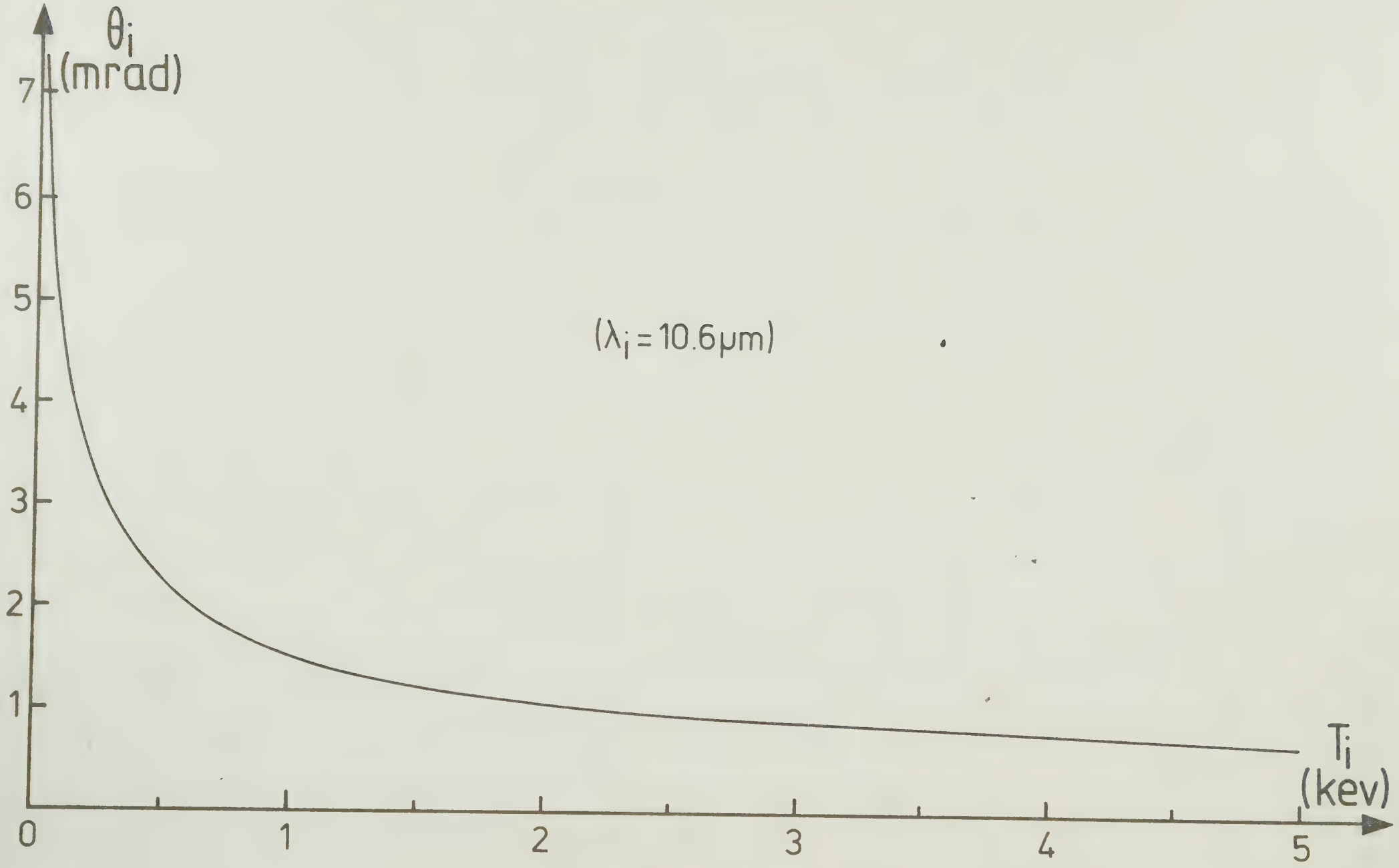


Figure 4 :Dépendance dans la température ionique de l'angle de diffusion.

Avec le laser CO_2 on dispose d'une bonne puissance de sortie et d'un détecteur à faible bruit.Le désavantage est que vu les faibles angles de diffusion nécessaires on a une mauvaise résolution spatiale dans la direction de propagation de l'onde électromagnétique de pompe.

6) A t'on observé les modes cyclotroniques ioniques dans le plasma de TFR?

Une expérience du groupe Tfr utilisant la diffusion micro-ondes a été realisé dans le domaine des ondes cyclotroniques ioniques en 1978 (7).Il semble que le niveau d'instabilité des ondes ait été atteint,ce qui a permis l'observation des modes supposés excités par le courant parallèle au champ magnétique.La figure 5 tirée de (7) montre le spectre observé.La résolution en fréquence était trop mauvaise pour interpréter ce spectre en terme de température ionique.Il convient cependant d'être prudent avant de conclure sur la nature des modes. En effet,les valeurs observées des pics ne semblent pas coincider avec celles que nous avons calculées.Mais on peut montrer que compte tenu de la zone d'observation du spectre (r=11cm) (correction spatiale sur la fréquence cyclotronique),et de la résolution en fréquence (qui était de 5Mhz,pour une fréquence cyclotronique de 60Mhz dans l'hydrogène)et surtout de la très grosse incertitude sur Ti(Te/Ti était donnée à 50% près en r=11cm),il n'est finalement pas impossible que les modes de Bernstein quasi-neutralisés aient été vus. D'autres hypothèses sont néanmoins émises:le groupe TFR avance l'existence de modes plasma électroniques excitées par des électrons rapides susceptibles de dégénérer en des modes de Bernstein ioniques dans certaines conditions(par exemple par un couplage non-linéaire de deux ondes électroniques,peut être également par conversion de mode).

Une autre interprétation théorique a été faite par Croci (8);il

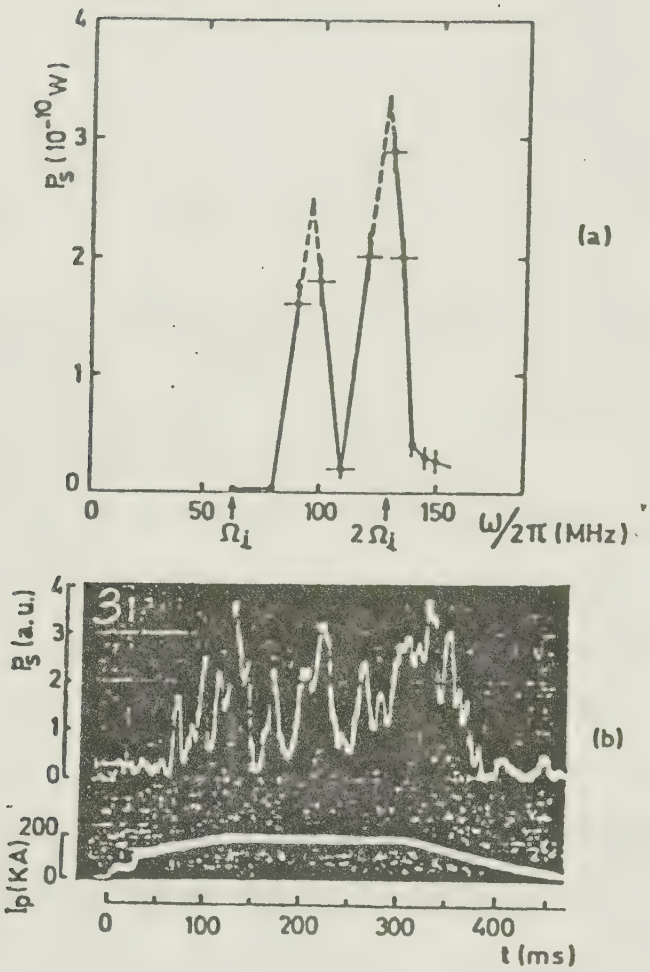


FIG. 5 (a) The scattered power P_s as a function of the frequency $\omega/2\pi$ at t = 280 ms. Hydrogen, $\bar{n}_e(r = 11$ cm) = 1.0×10^{13} cm^{-3}, $T_e(r = 11$ cm) = 800 eV, $T_e(r = 0)$ = 2.1 keV, I = 200 kA, B = 49 kG, a = 17 cm, $T_e/T_i(r$ = 11 cm) = 2. The arrows indicate the values of Ω_i and $2\Omega_i$ at r = 11 cm, the center of the scattering volume. (b) The scattered power P_s as function of time for $\omega/2\pi$ = 90 MHz corresponding to the first peak of (a) (upper trace) and the discharge current I (lower trace).

Figure 5:Spectre des fluctuations observées dans TFR (réf 7).

explique l'excitation observée par une instabilité de dérive initiée par des effets toroidaux.Si les résultats numériques qu'il avance semblent coincider de manière satisfaisante avec les valeurs observées,il n'est pour nous pas très clair qu'il existe des modes de dérive à des fréquences aussi élévées sans que l'on puisse invoquer un éventuel couplage avec les modes cyclotroniques.

Notre conclusion est que cette question reste ouverte ,une étude expérimentale systématique dans ce domaine de fréquence et de nombre d'onde reste à faire.C'est ce que peut apporter le dispositif expérimental que l'on va maintenant décrire.

7)Description d'un dispositif expérimental.

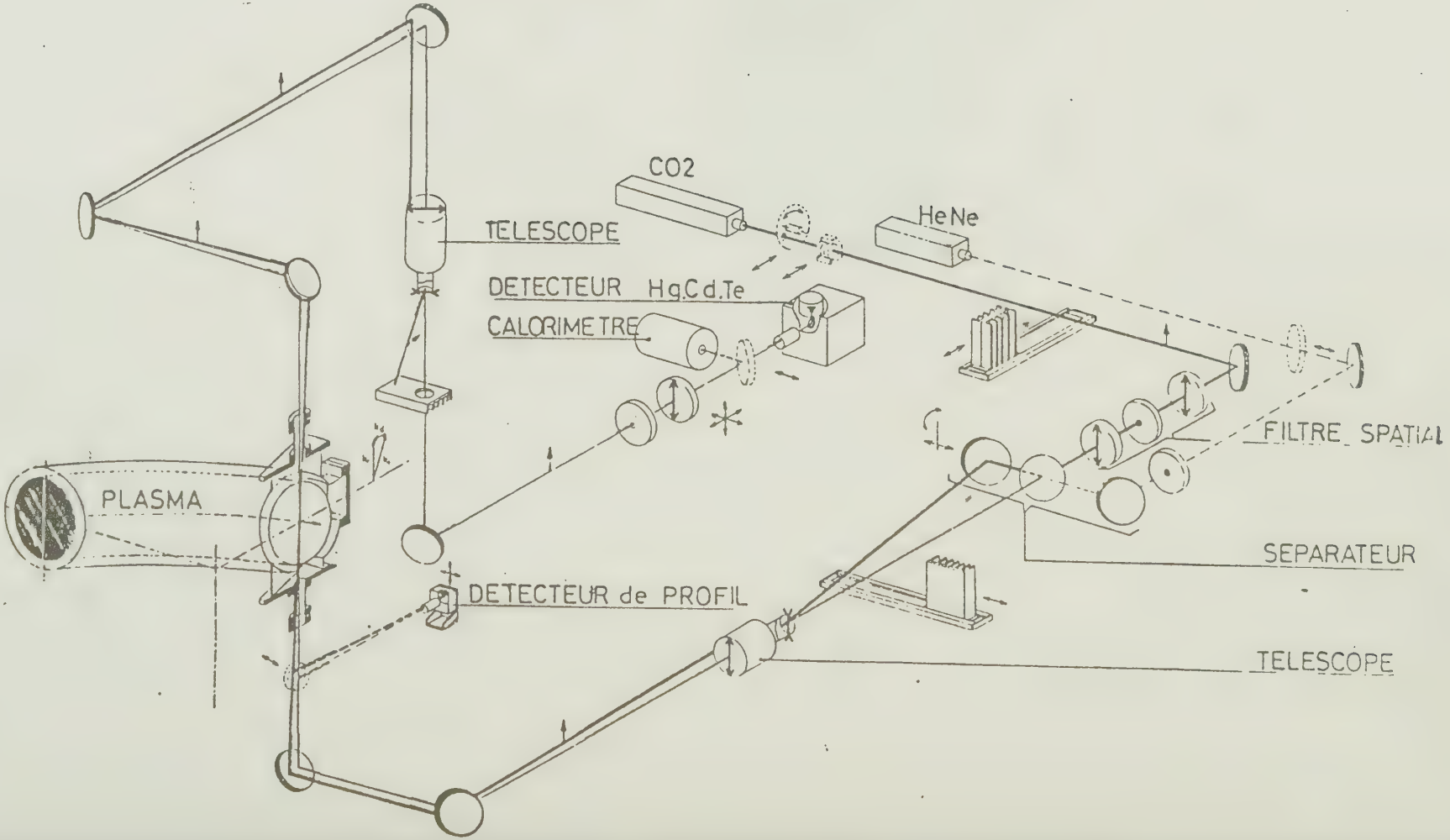
Cette description est volontairement succincte car elle est décrite en détail ailleurs (6).Il s'agit d'une expérience montée spécialement à Fontenay aux Roses pour faire le diagnostic proposé:le schéma de principe est celui de la figure 2 que l'on a utilisé pour détecter les fluctuations thermiques dans un plasma de laboratoire en champ magnétique nul.

-description optique.

La figure 6 donne les élements essentiels.La lame séparatrice permet la séparation des faisceaux principal et oscillateur local elle supporte une forte puissance (lame en Zn-Se).Les différentes lentilles servent à focaliser le faisceau pour le rendre compatible avec les exigences de l'expérience (taille et divergence des faisceaux) et avec les conditions d'accessibilité de la machine. (à titre d'exemple les fenêtres d'accès actuelles ont un diamètre de 4.4 cm).Les télescopes sont indispensables pour réaliser le faible angle de diffusion (1.5mrad) nécessaire.On sait même descendre à 0.8 mrad actuellement.(il faut élargir les faisceaux pour limiter la divergence naturelle à moins de 30% de l'angle de diffusion souhaité)

FREMIR - T. F. R

Figure 6:Schéma général de l'optique. (réf 6)



Géométrie de la détection.

Cette géométrie a été conçue pour observer "nos" modes,la visée se fait dans un plan vertical étant donné l'accès disponible (fig 6). Suivant que l'on vise au centre,ou à la périphérie on sélectionne ainsi un nombre d'onde poloidal ou radial ,voir la figure 7. Remarque:on peut "conjurer" le gradient de champ magnétique en choissisant des faisceaux étroits car le diagnostic résiste très bien à une mauvaise résolution en k.On aura ainsi une bonne mesure locale(en espace) de température.Remarquons que lorsque l'accès le permet il est possible de réaliser une expérience de diffusion avec un vecteur d'onde parallèle à b et en sélectionnant un k de diffusion vertical (pour une visée dans le plan équatorial) il est possible de faire un nouveau diagnostic intéressant qui consiste à mesurer la direction du champ magnétique du Tokamak (9).

-description électronique.

Elle doit comprendre au minimum le dispositif de polarisation du détecteur.On utilise ici un détecteur photo-voltaique Hg-Cd-Te refroidi à l'azote liquide.Après le détecteur on doit placer une électronique constituée d'amplificateurs à faible bruit et à gain suffisant,suivi d'un analyseur de spectre et d'un dispositif intégrateur éventuel.Un scéma de principe est donné à la figure 8.

Conclusion de ce chapitre:On a ici passé en revue rapidement quelques aspects de la diffusion Thomson qui est la méthode la plus prometteuse pour mesurer le facteur de forme $S(k,w)$.L'expérience proposée paraît tout à fait réalisable avec la technologie actuelle.

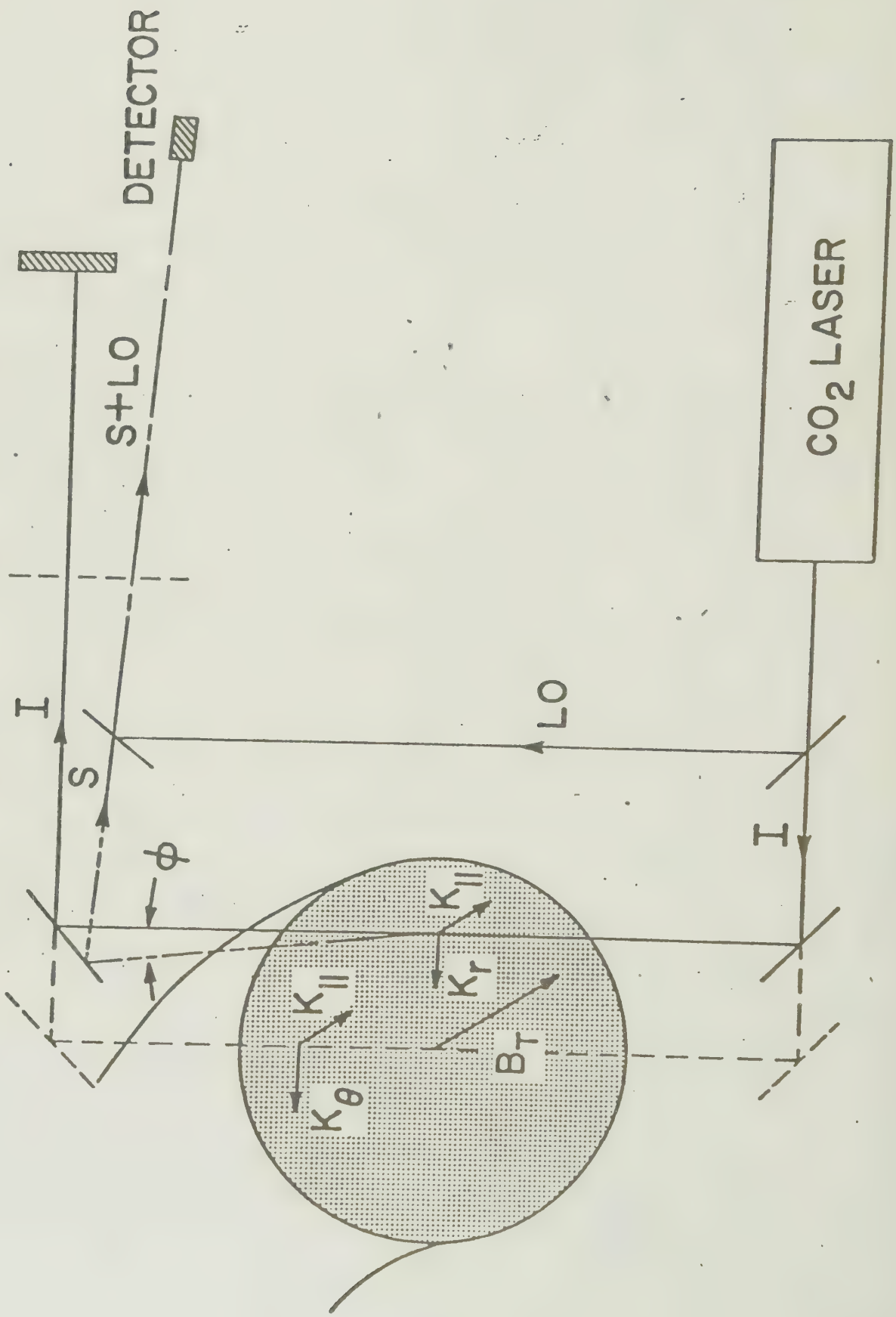


Figure 7:Plan de visée pour la diffusion (réf).

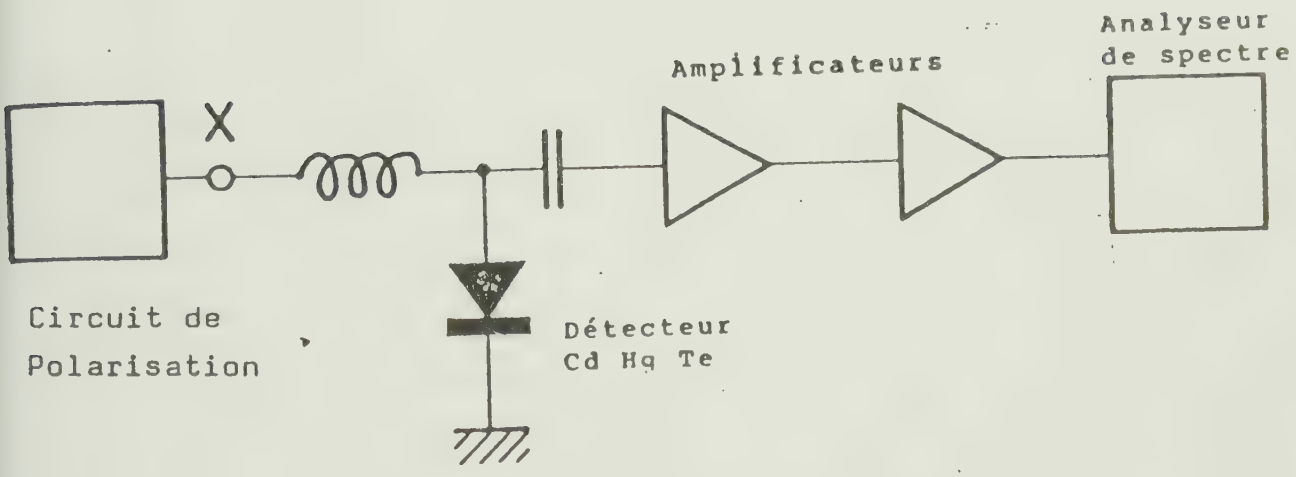


Figure 8: Schéma de principe d'une mesure.

Annexe 1 du chapitre VI.

Calcul de la densité spectrale du courant hétérodyne .

On rappele que le courant sur le détecteur est donné par:

$$i(t) = c \int_{Ad} d^2n \; |E_s + E_p|^2 \qquad c = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$$

Il y a en fait lieu de tenir compte de deux termes de champ électrique supplémentaires dans l'évaluation du courant:soit Ei et Eb qui désignent le champ électrique incident parvenant directement au détecteur et le champ du au rayonnement propre dû plasma considéré comme un bruit parasite.Les termes croisés de Eb avec les autres champs ne donnent rien de particulier en moyennant car ils sont non-corrélés,par contre le terme croisé $E_i E_s^*$ contient l'information désirée sur le signal diffusé.On ne le considérera pas ici bien que plusieurs auteurs (notamment Surko et al (2))l'ai envisagé par une de méthode de détection consistant à utiliser la lumière "parasite" directe comme oscillateur local sur le détecteur.

On ne s'intéresse donc qu'au terme modulé de la forme:

$$i_m(t) = c \int_{Ad} d^2n \; \{E_s E_p^* + cc\}$$

si: $E_i(n) = E_i(1)(n)\; Re\{e^{i(k_i n - \omega_i t + \varphi_i)}\}$

$E_p^*(n) = E_p(1)(n)\; Re\{e^{-i(k_p n - \omega_p t + \varphi_p)}\}$

on a : si $\varphi_i - \varphi_p = 0$ $\qquad i_m(t) = E_p E_i \; c(n_0 \lambda_i) \int d^3n \; m(n,t)\, \bar{l}(1)(n)\, e^{-i(k_\Delta \bar{n} - \omega_\Delta t)}$

$(1)^*(n)\, e^{i(k_\Delta \bar{n} - \omega_\Delta t)}$ $\qquad \omega_\Delta = \omega_p - \omega_i \quad k_\Delta = k_p - k_i$

Introduisant la transformée de Fourier de la détection par:

$$(1)(n) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{-i\bar{k}\cdot\bar{n}}\, W(k)$$

on obtient pour la transformée du courant: $i_m(\omega)$

$$i_m(\omega) = E_p E_i \; (i\, c\, n_0 \lambda_i) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \{W(k_\Delta - k)\, m(k, \omega + \omega_\Delta) - m^*(k, \omega_\Delta - \omega)\, W^*(k_\Delta - k)\}$$

Comme la densité spectrale est définie à l'aide de la fonction d'autocorrélation du courant: on introduit au passage une moyenne statistique. $\qquad J_i(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \langle i(\omega)\, i(-\omega) \rangle \qquad i(\omega) = \int_{-T/2}^{+T/2} dt\, i(t)\, e^{i\omega t}$

La moyenne statistique est nécessaire et elle fait intervenir l'hypothèse des phases aléatoires, pour le calcul explicite, d'une réalisation à une autre. Si l'on suppose les fluctuations homogènes en V et T, il faut évaluer des termes croisés du type:

$$\int n_e(k',\omega)\, n_e(k'',\omega')\, d^3k'\, d^3k''\, d\omega'\, W(k_\Delta - k')\, W(k_\Delta - k'')$$

Ces termes croisés $n_e n_e'$ ne sont non-nuls que pour: $|\omega - \omega'| \leq \frac{1}{T}$

$$|k'' - k'| \leq \frac{1}{V^{1/3}}$$

Si on passe à la limite pour le volume V et le temps T de moyennage (ce qui revient formellement à écrire: $\int_{\delta(k''-k')} d^3k''\, dk' \int d\omega\, \delta(\omega - \omega')$), les termes croisés disparaissent et l'intégrale menant au calcul de Is: $I_s(\omega) = c^2 E_p^2 E_i^2\, n_0^2 \lambda_i^2 \int d^3k'\, d^3k''\, \rho_i \underset{V,T\to\infty}{\lim} \frac{1}{VT} \{ W(k_\Delta - k')\, n_e(k', \omega + \omega_\Delta) - n_e^*(k'', \omega_\Delta - \omega)\, W^*(k_\Delta - k'') \} \{ W(k_\Delta - k'')\, n_e(k'', \omega + \omega_\Delta) - n_e^*(k'', \omega_\Delta - \omega)\, W^*(k'' - k_\Delta) \}$ se réduit après introduction du facteur de forme:

$$S_e(k,\omega) = \underset{V,T\to\infty}{\lim} \frac{1}{VT} \frac{\langle |n_e(k,\omega)|^2 \rangle}{n_0}$$

à l'expression :

$$I_s(\omega) = E_p^2 E_i^2 (c\, n_0\, \lambda_i)^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |W(k_\Delta - k)|^2 [S(k, \omega + \omega_\Delta) + S(k, \omega_\Delta - \omega)]$$

Comme l'oscillateur local est dans la direction d'observation lorsqu'il est matérialisé dans le plasma par un faisceau réel on sélectionne bien le nombre d'onde k_Δ à une convolution près.

Références du Chapitre VI.

(1) J. Sheffield ,Plasma Scattering of electromagnetic Radiation (réf 4 du cha IV).

(2) C.M. Surko,R.E.Slusher,Phy.of Fluids,

(3) R.E. Slusher,C.M. Surko,Phy.of Fluids,23,2425 (1980).et Phy. Rev.Letters,40,593 (e) (1978).

(4) E. Holzauer,H.J. Massig,Plasma Physics,20,867 (1978).

(5) voir la réf1 du cha IV.

(6) A.Truc,J.Olivain,D.Gresillon,A.Quemeneur,F.Gervais,Rapport Cea-Euratom 1135 (1981).

(7)TFR group,Phy.Rev. Letters,41,113 (1978).

(8) R.Croci,letter in Nuclear Fusion,20,486 (1980).

(9) T.Lehner,à paraître.

(10) D. Gresillon,Rapport PMI 1121 (1981).

Conclusions et perspectives ultérieures.

On a donné une méthode pour mesurer la température ionique dans les Tokamaks qui semble assez prometteuse(on peut bien entendu utiliser ce procédé dans tout autre plasma "chaud").L'expérience à effectuer est assez délicate mais possible dans la limite des developpements technologiques actuels,et compte tenu desrésultats encourageants obtenus par différentes équipes d'expérimentateurs spécialistes du sujet.

Il semble intéressant de poursuivre l'étude des fluctuations de manière tant théorique qu'expérimentale puisque l'on sait que la mesure du facteur de forme permet d'apporter de précieux renseignements sur le caractère "turbulent" ou non du plasma.Il serait alors indiqué d'élaborer des modèles théoriques du facteur de forme pour un plasma hors d'équilibre et d'en déduire ,supporté par des études expérimentales les coefficients de transport qui gouvernent le plasma transversalement au champ magnétique. Cet examen s'avère crucial pour interpréter le transport anormal observé et que l'on avait d'abord attribué spéculativement aux modes de dérive.Il ne semble pas exclus que les modes cyclotroniques ioniques soient responsables de ces anomalies.C'est dans cet esprit que nous avons commencé une étude en calculant notamment les coefficients de diffusion des particules transverses à B à l'aide de la théorie quasi-linéaire pour les modes ioniques dans un plasma voisin de l'équilibre thermique.Nous espérons developper des modèles plus réalistes tenant compte des conditions complexes qui sont celles des plasma de fusion par confinement magnétique.